



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS ANGICOS
CURSO BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS
EXATAS, TECNOLÓGICAS E HUMANAS - DCETH

ROSANE RAYANNE JOTA RIBEIRO

**REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE ALGUNS MÉTODOS
NUMÉRICOS PARA OBTENÇÃO DE ZEROS REAIS DE
FUNÇÕES TRANSCENDENTES E POLINOMIAIS**

ANGICOS-RN

2012

ROSANE RAYANNE JOTA RIBEIRO

**REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE ALGUNS MÉTODOS
NUMÉRICOS PARA OBTENÇÃO DE ZEROS REAIS DE
FUNÇÕES TRANSCENDENTES E POLINOMIAIS**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do
Semi-Árido – UFERSA, Campus Angicos para a obtenção
do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof^o. Me. Matheus da Silva Menezes –
UFERSA.

ANGICOS-RN

2012

Catálogo na Fonte

Biblioteca Universitária Campus Angicos (BCA-UFERSA)

R484r	<p>Ribeiro, Rosane Rayanne Jota. Revisão bibliográfica de alguns métodos numéricos para obtenção de zeros reais de funções transcendentais e polinomiais / Rosane Rayanne Jota Ribeiro. – Angicos, RN : UFERSA, 2012. 65 f.</p> <p>Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Campus Angicos. Orientador: Prof.º Me. Matheus da Silva Menezes.</p> <p>1. Zeros de funções polinomiais. 2. Zeros de funções transcendentais. 3. Método da bissecção. 4. Método da falsa posição. 5. Método do ponto fixo. 6. Método de Newton. 7. Método da Secante I. Título.</p> <p>RN/UFERSA/BCA CDD 515.5</p>
-------	---

Ficha Catalográfica elaborada pelo Bibliotecário-Documentalista
Sale Mário Gaudêncio – CRB15/476

ROSANE RAYANNE JOTA RIBEIRO

**REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DE ALGUNS MÉTODOS
NUMÉRICOS PARA OBTENÇÃO DE ZEROS REAIS DE
FUNÇÕES TRANSCENDENTES E POLINOMIAIS**

Monografia apresentada no Campus Angicos para a
obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

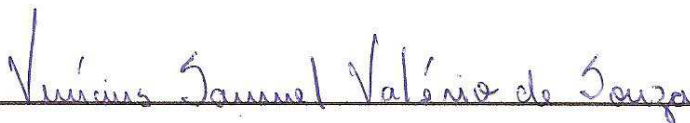
APROVADO EM: 29 / 10 / 2012

BANCA EXAMINADORA



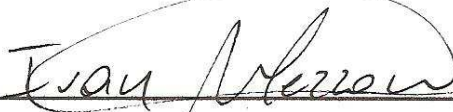
Prof.º Me. Matheus da Silva Menezes – UFERSA

Presidente



Prof.º Vinicius Samuel Valério de Souza – UFERSA

Primeiro Membro



Prof.º Ivan Mezzomo – UFERSA

Segundo Membro

A **José Leonis Ribeiro Júnior** (in memoriam), meu pai, pela sua dedicação a família, por todo o amor, carinho, amizade e incentivo que me deu durante todos os anos que esteve presente nesta terra, onde desde de minha infância sonhava com este momento, fazendo sempre tudo que estava a seu alcance (e muitas vezes até o que não estava) para proporcionar uma boa qualidade de vida para mim e para minha família. Por tudo que o senhor fez, e por tudo que és no meu coração, dedico a ti este trabalho, meu pai.

Ao meu avô **José Leonis Ribeiro** (in memoriam) e aos meus tios **Jean Carlos Dantas** (in memoriam) e **Luiz Monte Ribeiro** (in memoriam) que me proporcionaram inúmeros momentos de alegria, me incentivando a buscar ter uma vida centrada nos estudos. Sem dúvida estariam muito orgulhosos por eu ter vencido este desafio.

A **Deus**, meu criador e Pai, por toda bondade, misericórdia, proteção, força e pelo seu infinito amor demonstrado na Cruz do Calvário ao fazer cair sob seu Filho Jesus Cristo a iniquidade de todos nós, para que tivéssemos esperança de vida, e vida eterna.

A minha mãe, **Sandra Jaqueline Jota Ribeiro**, que com a ausência do meu amado pai **José Leonis Ribeiro Júnior** desempenhou não apenas seu papel de mãe, mas também o de pai, sempre sonhando, incentivado e acreditando que este momento chegaria.

A toda minha família, irmãos, avós, primos, tios e tias que tanto me incentivaram e desejaram a realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

“Ao único, que é digno de receber a honra e a glória, a força e o poder ao rei eterno imortal, invisível, mas real a ele...” (Ao Único – Bené Gomes) , Deus, quero por meio destas humildes linhas agradecer por sua imensa misericórdia que se renovam cada manhã, agradeço também todo o amor que tens para comigo, pela sabedoria que mi é dada, pela proteção, saúde, e a força durante essa jornada de estudos, pois sem a tua presença não teria chegado até aqui;

A meu pai, José Leonis Ribeiro Júnior (in memoriam), que foi um pai maravilhoso, extremamente dedicado, amoroso, carinhoso, cuidadoso, corajoso, que sempre buscou proporcionar a sua família as melhores condições de vida possíveis, e muito me incentivou a estudar;

A minha mãe, Sandra Jaqueline Jota Ribeiro, mulher guerreira, corajosa e de fé, por suas orações, apoio, amor, carinho, amizade, preocupações e incentivo aos estudos e aos meus sonhos;

Ao maravilhoso namorado que Deus me presenteou, Josimário de Oliveira da Silva, por todo o amor, carinho, companheirismo, amizade e incentivo, e principalmente pela paciência na elaboração deste trabalho. Também quero agradecer os seus ensinamentos durante este curso, pois sempre foi meu companheiro de estudo.

A minha avó materna, Maria Auxiliadora Jota, mulher forte e de fé, pelas orações, atenção e por toda paciência, pois muitas vezes quando me reunia com colegas da turma para estudar e fazer trabalhos ela ficava até altas horas da noite aguardando que eu chegasse para dormir;

Ao meu orientador, Matheus da Silva Menezes, por todo o conhecimento passado, pela atenção, paciência, disponibilidade, amizade e pela contribuição para minha vida acadêmica e realização deste trabalho. Parabéns pelo excelente professor que és;

A todos os professores da UFERSA, pelo conhecimento transmitido, paciência e pelas contribuições para a minha vida acadêmica;

A todos os meus amigos(as)/colegas da primeira e também da segunda turma do Bacharelado em Ciências e Tecnologia da UFERSA Campus Angicos das quais fiz parte, pela amizade, companheirismo, parcerias e contribuição durante esses anos, foi um prazer conhecer e conviver com vocês;

A minha avó paterna, Francisca Francinete Ribeiro, pelo carinho, amor, incentivo e por sempre torcer por minha realização.

Aos meus primos, Roberto Carlos Jota Júnior e Wykson Ramonn da Silva Aguiar, pelo incentivo, apoio, compreensão e principalmente paciência, pois inúmeras vezes ocupei o computador, que é de uso de todas da casa, por varias horas para estudar e fazer trabalhos, não permitindo assim que eles também utilizem;

A toda minha família, irmãos, avós, primos, tios e tias, que tanto me incentivaram e desejaram a realização deste sonho;

Em fim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta durante este curso, e a todos que torceram e acreditaram que este momento chegaria. Serei infinitamente grata a todos vocês.

“O temor do SENHOR é o principio da sabedoria...”

(Salmos 111:10 – Bíblia Sagrada)

RESUMO

Em diversos problemas de caráter científico, é comum depararmo-nos com a necessidade de obter uma solução aproximada para encontrar raízes de funções. Nesse ponto, este trabalho objetiva realizar um estudo acerca de alguns métodos utilizados para a obtenção de uma solução aproximada das raízes de funções. A pesquisa realizada deu-se por meio de uma revisão bibliográfica, enfocando os Métodos Numéricos da Bissecção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante. Com o intuito de ilustrar o funcionamento e aplicação desses métodos, foram realizados testes numéricos de problemas extraídos da literatura por meio da implementação destes métodos no SCILAB 5.3.2. Para cada teste realizado foram analisados os parâmetros que influenciam cada método e a situação de convergência para a solução aproximada dos problemas analisados.

Palavras-chave: Zeros de Funções Polinomiais e Transcendentes. Método da Bissecção. Método da Falsa Posição.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabelamento Genérico de uma Função $f(x)$	24
Tabela 2 – Algoritmo do Método da Bissecção	30
Tabela 3 – Algoritmo do Método da Falsa Posição	32
Tabela 4 – Algoritmo do Método do Ponto Fixo	34
Tabela 5 – Algoritmo do Método de Newton	37
Tabela 6 – Algoritmo do Método da Secante	39
Tabela 7 – Tabelamento da Função $f_1(x)$ no Intervalo $[0,3]$	41
Tabela 8 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 1.....	42
Tabela 9 – Tabelamento da Função $f_2(x)$ no Intervalo $[0,5]$	44
Tabela 10 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 2.....	45
Tabela 11 – Tabelamento da Função $f_3(x)$ no Intervalo $[-5,5]$	46
Tabela 12 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 3.....	47
Tabela 13 – Tabelamento da Função $f_4(x)$ no Intervalo $[1,5]$	48
Tabela 14 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 4.....	49
Tabela 15 – Tabelamento da Função $f_5(x)$ no Intervalo $[2,5]$	50
Tabela 16 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 5.....	51

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico de uma função f no ponto $(x, f(x))$	17
Figura 2 – Raiz de uma Equação	20
Figura 3 – Segmento ab e o ponto médio c_0	21
Figura 4 – Segmento a_0b_0 e o ponto médio c_1	21
Figura 5 – Gráfico de uma Função de Raiz não Única.....	22
Figura 6 – Gráfico Genérico de $f(x)$	25
Figura 7 – Pontos de intersecção dos gráficos $f_1(x)$ e $f_2(x)$	26
Figura 8 – Fluxograma dos Métodos Iterativos na Etapa Refinamento da Aproximação Inicial para Raiz Exata.....	27
Figura 9 – Interpretação Geométrica do Método da Bissecção.....	29
Figura 10 – Interpretação Gráfica do Método da Falsa Posição.....	31
Figura 11 – Esquema Gráfico do Método do Ponto Fixo.....	34
Figura 12. – Gráfico representativo do Método de Newton.....	36
Figura 13 – Ilustração Geométrica do Método da Secante.....	38
Figura 14 – Gráfico da Função $f_1(x)$ no intervalo $[0,3]$	42
Figura 15 – Gráfico da Função $f_2(x)$ no Intervalo $[0,5]$	44
Figura 16 – Gráfico da Função $f_3(x)$ no Intervalo $[-5,5]$	47
Figura 17 – Gráfico da Função $f_4(x)$ no Intervalo $[1,5]$	49
Figura 18 – Gráfico da Função $f_5(x)$ no Intervalo $[2,5]$	51

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 OBJETIVOS	14
1.1.1 Objetivo Geral	14
1.1.2 Objetivos Específicos	14
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2 FUNDAMENTAÇÃO TEORICA	16
2.1 FUNÇÃO REAL DE UMA VARIÁVEL REAL.....	16
2.1.1 Função Polinomial	18
2.1.2 Função Transcendente	19
2.2 ZEROS DE FUNÇÕES REAIS	19
2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OBTENÇÃO DE RAÍZES REAIS	23
2.3.1 Isolamento das Raízes	23
2.3.1.1 Técnica do Tabelamento.....	24
2.3.1.2 Análise Gráfica.....	25
2.3.2 Refinamento	26
2.3.3 Critério de Parada	27
2.3.4 Descrição dos Métodos Estudados	28
2.3.4.1 Método da Bissecção.....	28
2.3.4.2 Método da Falsa Posição	30
2.3.4.3 Método do Ponto Fixo	32
2.3.4.4 Método de Newton	35
2.3.4.5 Método da Secante.....	37
3 RESULTADOS E DISCUSSÃO	40
3.1 FUNÇÕES CONSIDERADAS NO TESTE NUMÉRICO	40
3.1.1 Emprego dos Métodos na Função $f_1(x)$	41
3.1.2 Emprego dos Métodos na Função $f_2(x)$	43
3.1.3 Emprego dos Métodos na Função $f_3(x)$	45
3.1.4 Emprego dos Métodos na Função $f_4(x)$	48
3.1.5 Emprego dos Métodos na Função $f_5(x)$	50
3.1.6 Desempenho Geral dos Métodos Aplicados	52

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS	56
APÊNDICE A – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DOS MÉTODOS	58
A.1 JUROS DE FINANCIAMENTO	58
A.1.1 Definição do Problema	58
A.1.2 Modelagem Matemática	58
A.1.3 Solução Numérica	59
A.1.4 Análise dos Resultados	61
A.2 CABO SUSPENSO	62
A.2.1 Definição do Problema	62
A.2.2 Modelagem Matemática	62
A.2.3 Solução Numérica	62
A.2.4 Análise dos Resultados	63
A.3 TEMPERATURA	64
A.3.1 Definição do Problema	64
A.3.2 Modelagem Matemática	64
A.3.3 Solução Numérica	64
A.3.4 Análise dos Resultados	65

1 INTRODUÇÃO

Habitualmente, nota-se nos diversos problemas provenientes da ciência e engenharia a necessidade de encontrar soluções para o qual uma função $f(x)$ obtenha valor igual a zero. Estas soluções são denominadas de raízes da equação ou zeros da função (BARROSO et al., 1987). A ocorrência de problemas envolvendo essa questão torna importante o estudo de artifícios que permitam encontrar estas raízes, visto que a determinação das mesmas será fundamental no estudo de problemas reais que estejam relacionados à equação $f(x) = 0$.

O registro mais antigo relacionado à problemática de encontrar uma raiz de uma equação data o ano de 1700 a.C. em uma tábua cuneiforme da Babilônia (BURDEN, 2008). Este mesmo autor relata que, "... um dos problemas básicos mais importantes da aproximação numérica é o problema de determinação de uma raiz (...) ou solução de uma equação da forma $f(x)=0$ " (BURDEN, 2008, p. 46).

De acordo com Campos Filho (2010), existem alguns métodos para se calcular analiticamente raízes de funções polinomiais de grau 2, 3 e até 4, que exigiram séculos de desenvolvimento matemático para que fossem propostos e consolidados. Apesar disto, existem diversos tipos de funções, como funções não lineares, funções de grau superior a quatro e as funções transcendentais, que não possibilitam a utilização de métodos diretos para o cálculo de suas raízes.

Quando a forma analítica de se obter a raiz de uma função for de difícil obtenção deve-se utilizar métodos que encontrem uma solução aproximada para essas raízes (CAMPOS FILHO, 2010). Esses métodos, em sua maioria, consistem em processos iterativos, onde as iterações seguintes fornecem aproximações mais precisas dos zeros das funções que as iterações anteriores (FRANCO, 2006). Segundo Barroso et al. (1987), embora estes métodos não disponibilizem raízes exatas, as mesmas poderão ser calculadas com a precisão que o problema necessite, quando as condições impostas pelo método forem atendidas.

No entanto, sempre irá ocorrer à necessidade de uma análise da função, bem como das técnicas numéricas para aproximações de raízes, tendo em vista que é indispensável o conhecimento de algumas questões que influenciarão na escolha do método mais apropriado para determinada situação, como também na sua eficiência, pois cada técnica de aproximação estabelece condições que irão indicar quando haverá convergência, como será essa

convergência e com que rapidez ela acontecerá. Para Sperandio et al. (2003), identificar as circunstância em que o método converge é o primeiro indicativo para escolhê-lo.

Nesse ponto, fica evidente a importância de se estudar métodos para encontrar raízes de equações. Diante disso, o presente trabalho objetiva realizar uma revisão bibliográfica sobre alguns dos principais métodos, voltados ao problema de encontrar zeros reais de funções transcendentais e polinomiais, existentes na literatura. Além disso, o presente trabalho descreve um comparativo entre os métodos estudados mediante aplicação de problemas matemáticos. Esta pesquisa também ilustra a aplicação dos métodos por meio de problemas práticos, que são apresentados no Apêndice A.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Realizar uma revisão bibliográfica dos principais métodos para encontrar zeros de funções transcendentais e polinomiais e comparar os métodos estudados por meio da aplicação de problemas de teste.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Levantar os aspectos teóricos e práticos referentes aos principais métodos existentes na literatura voltados a encontrar zeros de funções transcendentais e polinomiais;
- Analisar a situação em que cada método estudado converge para a sua solução aproximada;
- Analisar os parâmetros de cada método estudado e verificar sua influência no resultado final;
- Fazer um comparativo dos métodos estudados, mediante aplicação de alguns problemas existentes na literatura, utilizando o SCILAB 5.3.2.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Com isto, o presente trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica matemática utilizada pelos métodos estudados. No capítulo 3 é demonstrado o funcionamento e a aplicação numérica dos métodos estudados, bem como é realizada uma análise dos parâmetros e do desempenho de cada método, mediante aplicação de problemas de teste. Por fim, no capítulo 4 são feitas as considerações finais do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Essa seção trata de uma análise da literatura a respeito do tema de estudado nesse trabalho. Nesse ponto, serão abordados itens considerados essenciais para caracterizar alguns métodos numéricos que tem o intuito de encontrar zeros de funções transcendentais e polinomiais.

2.1 FUNÇÃO REAL DE UMA VARIÁVEL REAL

O conceito de função expressa a ideia de dependência de um conjunto à elementos de outro conjunto. Tais conjuntos serão sempre abordados em nosso estudo como subconjunto dos números reais.

Conforme Flemming (2009) relata, as funções definidas em conjuntos reais são denominadas funções reais de variável real. Para Stewart (2006) tais funções podem ser representadas de diversos modos: algebricamente por meio de equação, por tabelamento, por gráfico ou até mesmo verbalmente descrevendo-a através de palavras. Dentre as várias definições de função existentes, foi escolhida nesse trabalho a citada por Flemming (2009), onde a mesma apresenta o seguinte conceito de função:

Definição 1 – Função: Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} . Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B .

Definição 2 – Domínio e Imagem: O conjunto A é chamado *domínio de f* e é denotado por $D(f)$. O conjunto B é chamado *contradomínio* ou *campo de valores de f* . Para um elemento x pertencente a A , a componente $f(x)$ pertencente a B é chamado valor da função no ponto x ou imagem de x por f .

Corriqueiramente, costuma-se escrever uma função f de uma variável real, com a configuração $y = f(x)$, onde x pertencente ao conjunto domínio A .

A definição de função condiciona o conjunto B dependência dos elementos de A , de forma que os valores da função são estabelecidos com a variação da componente x dentro do

domínio de f . Por esta razão, Stewart (2006) conceitua a variável independente de uma função o símbolo x empregado para um número aleatório no domínio da função, e nomeia variável dependente o termo y atribuído a representação de um número na variação de f .

Para Guidorizzi (2001), sendo $f: A \rightarrow B$ uma função, o seu gráfico pode ser descrito e representado da seguinte maneira:

$$G_f = \{(x, f(x)) / x \in A\}$$

onde G_f é um conjunto denominado gráfico de f . Ainda de acordo com Guidorizzi (2001, p.26):

“ ... assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x,y) de números reais. Munido-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o lugar geométrico pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f . ”.

Logo, uma representação genérica de um gráfico de f em função de x pode ser representada por:

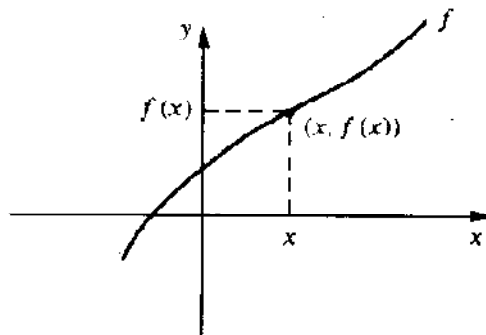


Figura 1 - Gráfico de uma função f no ponto $(x, f(x))$

Fonte: Guidorizzi (2001).

As funções matemáticas possuem uma enorme variedade de características que as tornam distintas não apenas em sua representação equacional, mas também em sua representação gráfica. Todavia, em meio a esta diversidade, serão analisadas apenas as funções polinomiais e transcendentais, em virtude delas constituírem o objeto de estudo do trabalho.

Conforme dito anteriormente, os valores de x que anulam $f(x)$ podem ser reais ou complexos, contudo, neste trabalho, abordaremos apenas as raízes reais das funções supracitadas.

2.1.1 Função Polinomial

De acordo com Flemming (2009) temos:

Definição 3 – Função Polinomial: Denotamos *função polinomial de grau n* , com $n \in \mathbb{N}$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

onde $a_0 \neq 0$, a_1, a_2, \dots, a_n são constantes reais chamadas coeficiente n , com $a_0 \neq 0$ determina-se o grau da função.

Uma análise importante referente às equações polinomiais pode ser fundamentada nos teoremas seguintes, definidos em Campos Filho (2010).

Teorema 1 – Teorema Fundamental da Álgebra: Uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas, se cada raiz for contada conforme a sua multiplicidade.

Teorema 2 – Teorema de Lagrange: Dada a equação $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, se $a_0 > 0$ e k ($0 \leq k \leq n - 1$) for o maior índice de coeficiente escolhido dentre os coeficientes negativos, então o limite superior das raízes positivas de $f(x) = 0$ pode ser dado por:

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{|a_k|}{a_0}} \quad (2)$$

onde $|a_k|$ é o valor absoluto em módulo do maior coeficiente negativo.

Este teorema é importante, pois proporciona conhecer o limite superior das raízes positivas de uma função. Com isso, ao buscar as raízes desconhecida de uma função saberemos que as mesmas se encontram em um intervalo $[a,b]$ onde o valor da componente b é estabelecido através da equação (2).

2.1.2 Função Transcendente

Como dito anteriormente, o presente trabalho pauta-se no objetivo de encontrar $f(x)=0$, onde a função $f(x)$ não é necessariamente polinomial ou tem comportamento de fácil visualização. Podemos ter a combinação de vários tipos de elementos lineares e não lineares, tais como: logarítmico, exponencial, senoidal, dentre outros, em associações mais complexas.

De acordo Campos Filho (2010) para as equações caracterizadas como transcendentais, geralmente há dificuldade para determinar o intervalo que possui raiz única tendo em vista que não existem teoremas que instituem padrões para que essa condição seja satisfeita. Dizemos que uma função é transcendente quando ela *não satisfaz* uma equação do tipo:

$$p_n y^n + \dots + p_1 y + p_0 = 0, \quad (3)$$

onde p_n ($0 \leq k \leq n$) é um polinômio em x com coeficientes racionais, ou seja, funções não algébricas são denominadas transcendentais (HASS, et al., 2010).

2.2 ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

Entende-se por zero ou raiz de uma função $f(x)$ o número real ξ que satisfaça $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$ (RUGGIERO; LOPES, 1996). Ou seja, a raiz de uma função é instituída quando um ou alguns valores, que pertencem ao conjunto dos números reais, são aplicados a variável independente x da equação fornecendo como resultado à variável dependente y valor igual a zero.

Graficamente, os zeros de uma função correspondem aos pontos nos quais o gráfico intercepta o eixo da abscissa (eixo x), como mostra a figura a seguir.

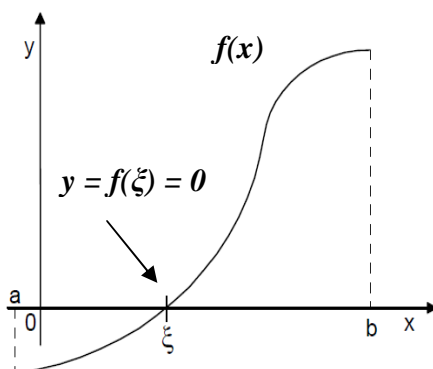


Figura 2 – Raiz de uma Equação
Fonte: Autoria Própria (2012).

Para expressões algébricas de até quarto grau, as raízes podem ser calculadas através de procedimentos analíticos (CAMPOS FILHO, 2010), designados métodos diretos. Entretanto, às vezes, encontrar um ponto no qual uma equação igual a zero pode ser uma tarefa complicada, dependendo do tipo de equação em que se deseja obter a raiz. Segundo Barroso et al. (1987), para polinômios de grau superior a quatro e para um amplo número de funções transcendentais, a raiz só é localizada através de métodos que gerem soluções aproximadas dentro de uma precisão pré-estabelecida, pois segundo Ruggiero; Lopes (1996), encontrar os zeros exatos dentro dessas circunstâncias é praticamente impossível. Estes métodos são chamados de iterativos ou indiretos.

As condições gerais para a análise destas funções em intervalos são de que as mesmas sejam contínuas nesse intervalo. Segundo Stewart (2006):

Definição 4 – Função contínua: A continuidade das funções pode ser vista como a não existência de pontos de descontinuidade, ou também de que a função f está definida para todos os pontos do intervalo estudado.

Todavia para definir uma aproximação da raiz das funções aplicando os métodos iterativos, é necessário conhecer um intervalo $[a,b]$ em que a raiz esteja inserida. Observando esta necessidade, utiliza-se como ferramenta teórica o Teorema de Bolzano (também conhecido como Teorema do anulamento), pois quando obedecidas as condições iniciais impostas por este artifício matemático se estabelece a garantia da existência de um número ímpar de raízes em um determinado intervalo, como pode-se perceber no enunciado a seguir (GUIDORIZZI, 1985).

Teorema 2 - Teorema de Bolzano ou Anulamento: Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ possuírem sinais contrário, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$, tal que $f(c) = 0$. Obviamente, se $f(a)$ e $f(b)$ possuírem sinais contrários então: $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Demonstração - 1:

Suponha $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Façamos $a = a_0$ e $b = b_0$; seja c_0 o ponto médio do segmento $[a_0, b_0]$. Temos:

$$f(c_0) < 0 \text{ ou } f(c_0) \geq 0.$$

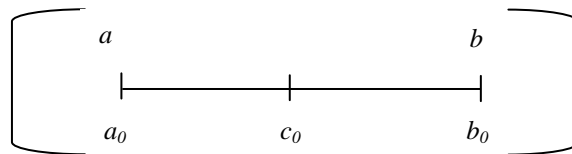


Figura 3 – Segmento ab e o ponto médio c_0

Fonte: Adaptado de Guidorizzi (1985).

Suponhamos $f(c_0) < 0$ e façamos $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$. Temos $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Seja c_1 o ponto médio do segmento $[a_1, b_1]$. Temos:

$$f(c_1) < 0 \text{ ou } f(c_1) \geq 0.$$

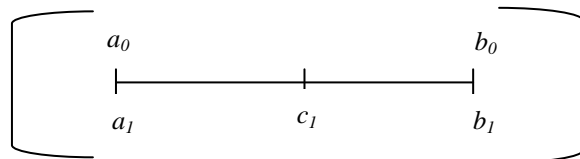


Figura 4 – Segmento a_0b_0 e o ponto médio c_1

Fonte: Adaptado de Guidorizzi (1985).

Suponhamos $f(c_1) \geq 0$ e façamos $a_1 = a_2$ e $c_1 = b_2$. Assim, $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) \geq 0$. Prosseguindo com este raciocínio, serão construídas n seqüências de intervalos que satisfazem as condições da propriedade de intervalos encaixantes:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Dessa forma, para todo n tem-se que:

$$f(a_n) < 0 \text{ e } f(b_n) \geq 0. \quad (4)$$

Seja c o único real tal que, para todo n ,

$$a_n \leq c \leq b_n.$$

As sequências de termos gerais a_n e b_n convergem para c . Segue então da continuidade de f , que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c) \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c) \quad (5)$$

Segue de (4) e de (5) que

$$f(c) \leq 0 \text{ e } f(c) \geq 0.$$

e, portanto, $f(c) = 0$. ■

Como observamos no teorema acima, o mesmo não garante a unicidade da raiz no intervalo, pois pode-se ter a seguinte situação:

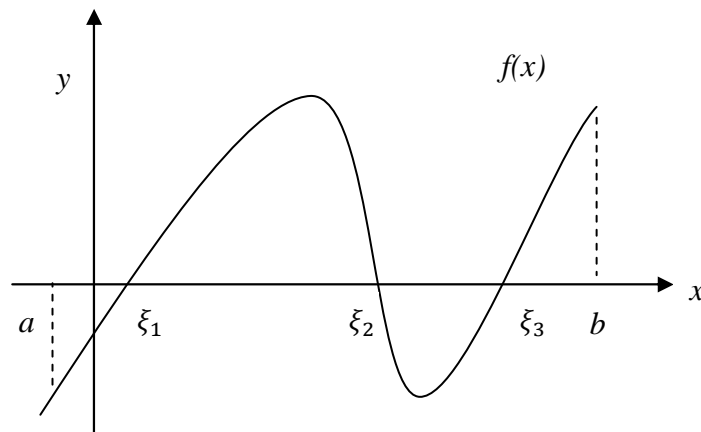


Figura 5 – Gráfico de uma Função de Raiz não Única
Fonte: Adaptado de Ruggiero; Lopes (1996).

Segundo Franco (2006), para utilizar os métodos numéricos não é suficiente apenas definir o intervalo em que encontra-se pelo menos uma raiz. Necessita-se também, assegurar

que a raiz seja única neste intervalo, pois os métodos só funcionam sob essa hipótese. Para que isso ocorra, o corolário do teorema de Bolzano estipula exigências a serem atendidas.

Corolário1- Corolário do Teorema de Bolzano: Sob as imposições propostas pelo teorema de Bolzano, se $f'(x)$ conservar o sinal em $[a,b]$, então esse intervalo contém um único zero de $f(x)$.

2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OBTENÇÃO DE RAÍZES REAIS

Os métodos numéricos são processos iterativos que tem como objetivo principal determinar raízes de equações a partir de uma aproximação inicial, efetuando refinamentos dessa aproximação, mediante uso de metodologia que promove iterações. De acordo com Ruggiero; Lopes (1996) esses métodos possuem duas fases:

- **Fase 1 – Isolamento da Raiz:** Consiste em localizar o intervalo que contém a raiz;
- **Fase 2 – Refinamento:** Consiste em melhorar a aproximação inicial até que seja atingida a precisão desejada.

Serão abordados a seguir os aspectos importantes relacionados a essas fases.

2.3.1 Isolamento das Raízes

Na fase isolamento da raiz, a função pode ser submetida a uma análise do tabelamento da função ou a uma análise gráfica e/ou teórica. Segundo Campos Filho (2010), usa-se o conhecimento acerca da função para delimitar o intervalo em que a raiz se encontra, observando o comportamento da curva e produzindo o tabelamento da função para buscar pontos que forneçam resultados compatíveis com o teorema do Bolzano. Ruggiero; Lopes (1996) atribui a esta fase uma grande importância, visto que o êxito da segunda fase depende fortemente da exatidão destas análises.

2.3.1.1 Técnica do Tabelamento

A técnica de realizar o tabelamento de $f(x)$ para vários valores reais propõe-se em considerar e analisar as mudanças de sinal de $f(x)$ e de $f'(x)$ (RUGGIERO; LOPES, 1996).

As mudanças de sinal implicam numa situação onde existem imagens $f(a)$ e $f(b)$ com sinais opostos. Sendo assim, tais imagens são localizadas em lados opostos em referência ao eixo das abscissas, de modo que, dentre as imagens de $f(x)$ compreendidas em $[a,b]$, no mínimo, uma obrigatoriamente possui valor igual a zero.

Stewart (2006) exemplifica e descreve que o tabelamento é feito atribuindo-se valores à variável independente x e obtendo valores na variável dependente y . Nesse processo, é interessante analisar onde ocorre mudança de sinal nos valores referentes à função $f(x)$, pois de acordo com o teorema de Bolzano, existe pelo menos uma raiz nesse intervalo.

Uma Demonstração do tabelamento de uma função $f(x)$ pode ser expressa na tabela abaixo.

Tabela 1 – Tabelamento Genérico de uma Função $f(x)$

x	x_1	x_2	x_3	x_4
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$
Sinal de $f(x)$	+	+	-	+

Fonte: Autoria Própria (2012).

Com observado a Tabela 1, é possível notar que para o intervalo tomado há mudança de sinal em $f(x)$, pois no ponto x_2 a função é positiva e passa a ser negativa no ponto x_3 , em seguida novamente passa a assumir sinal positivo quando x é igual a x_4 .

Posteriormente a elaboração do tabelamento e a verificação dos pontos onde ocorre a mudança de sinal de $f(x)$, pode-se instituir o intervalo onde a raiz está incluída. Um gráfico genérico de $f(x)$ com os valores adquiridos no tabelamento é ilustrados na Figura 6.

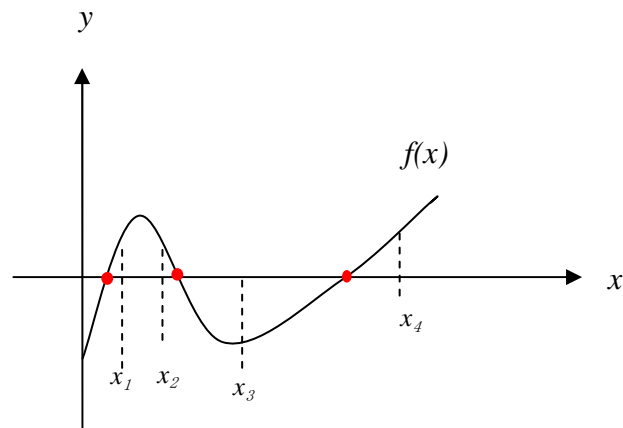


Figura 6 – Gráfico Genérico de $f(x)$

Fonte: Autoria Própria (2012).

2.3.1.2 Análise Gráfica

Arenales; Darezzo (2008) apresenta dois artifícios gráficos que podem ser utilizados para localizar os zeros de uma função $f(x)$:

- **Método I:** Traça-se o gráfico de $f(x)$ e observa-se os pontos onde o eixo das abscissas é cortado, pois nesses pontos teremos os zeros da função. Este caso pode ser observado na Figura 2;
- **Método II:** Fundamenta-se em transformar $f(x) = 0$ em uma expressão equivalente $f_1(x) = f_2(x)$. Nos pontos de intersecção dos gráficos $f_1(x)$ e $f_2(x)$ estarão as raízes. Como demonstra a Figura 7.

No entanto existem outras técnicas para localizar as raízes de uma função, Freitas (2000) sugere a seguinte análise:

- **Método III:** Obter f por meio da diferença de funções g e h ($f = g - h$) de forma que seja possível esboçar os gráficos das funções g e h .

Neste caso, transforma-se $f(x) = 0$ em duas funções $h(x)$ e $g(x)$ tal que $f(x) = g(x) - h(x) = 0$. Logo, a raiz da equação estará no ponto de encontro das funções $g(x)$ e $h(x)$. Observe que este caso assemelha-se ao Método II, pois a nulidade da função ocorre também no ponto de intersecção dos gráficos das funções trabalhadas, isto ocorre devido ao fato da aplicação da

condição que $f(x) = 0$.

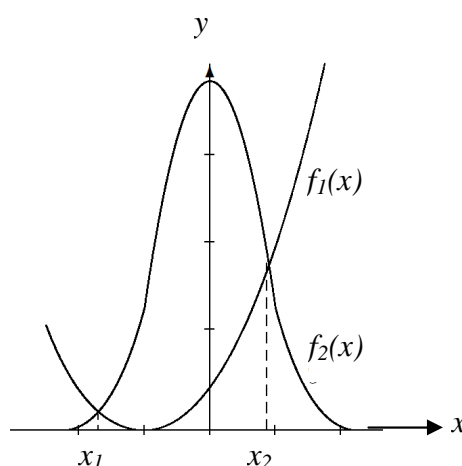


Figura 7 – Pontos de intersecção dos gráficos $f_1(x)$ e $f_2(x)$
Fonte: Autoria Própria (2012).

2.3.2 Refinamento

Nessa etapa, efetua-se o refinamento da raiz até que a precisão desejada seja atingida. Ruggiero; Lopes (1996) comenta que a forma como é realizado esse refinamento é o que diferencia os métodos. Todos os métodos que posteriormente serão apresentados neste trabalho são iterativos e, por sua vez, consistem num processo que determina uma sequência de instruções executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclo.

Ainda conforme Ruggiero; Lopes (1996), a finalização de cada ciclo dá-se o nome iteração, e a cada iteração tenta-se aprimorar os resultados obtidos nas iterações anteriores até que seja alcançado algum critério de parada pré-estabelecido.

Como os procedimentos desenvolvidos para calcular a aproximação do zero da função através dos métodos iterativos são os mesmos, (na verdade, o que difere é apenas o componente que executará o refinamento), pode-se representar o funcionamento geral dos procedimentos iterativos pelo fluxograma ilustrado na Figura 8.

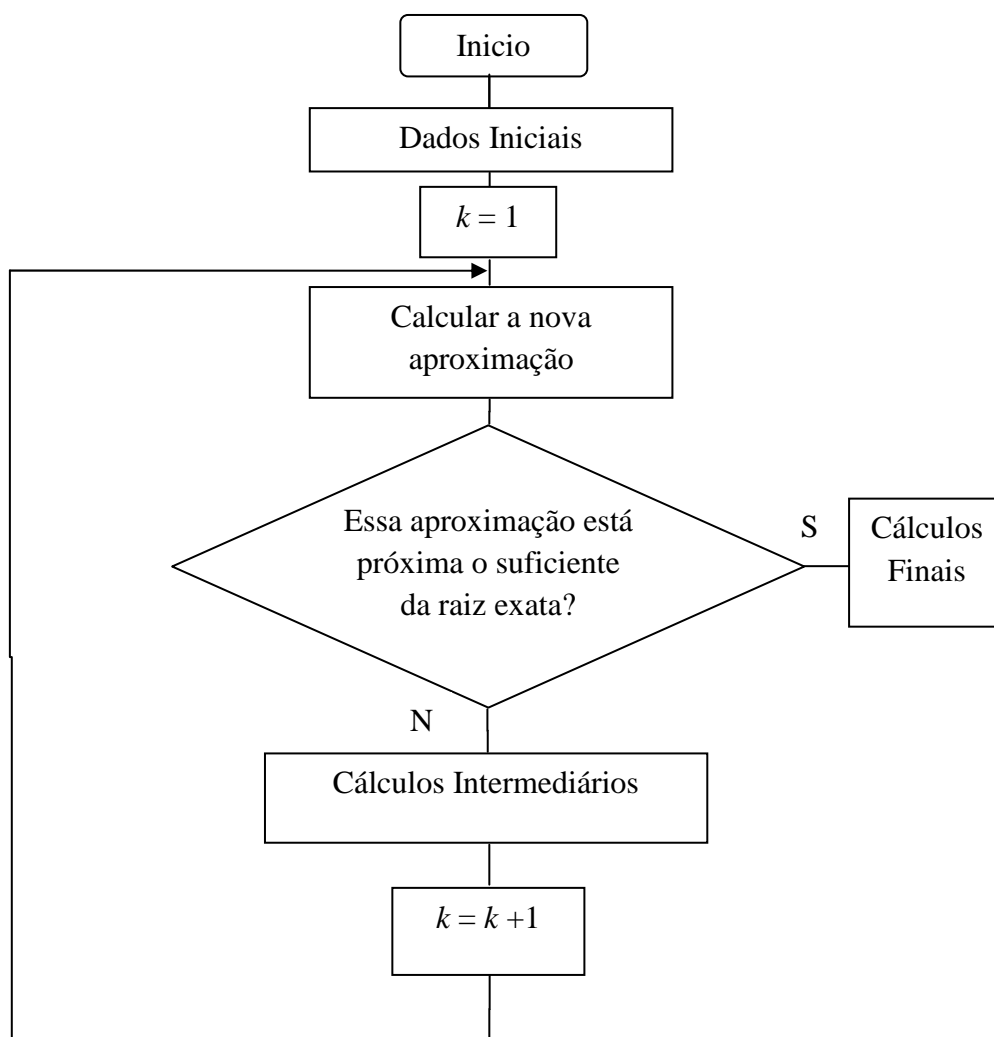


Figura 8 – Fluxograma dos Métodos Iterativos na Etapa Refinamento da Aproximação Inicial para Raiz Exata

Fonte: Adaptado de Ruggiero; Lopes (1996).

2.3.3 Critério de Parada

Os métodos iterativos buscam fornecer, a cada iteração, valores que convergem para o zero da função. Com isso é fundamental ter ciência do momento mais adequado para finalizar o método, visando que não haja um número muito extenso de iterações desnecessariamente, e visando que o valor obtido seja suficientemente próximo da raiz exata.

De acordo com Franco (2006), para verificar se o valor encontrado satisfaz a precisão são utilizados os critérios de parada. Se x_k e x_{k+1} forem duas aproximações consecutivas da raiz exata e ϵ uma tolerância prefixada, tem-se que os critérios de paradas são os seguintes:

- **Critério 1:** $|f(x_k)| \leq \epsilon$
- **Critério 2:** $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$
- **Critério 3:** $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \leq \epsilon$
- **Critério 4:** Número Limite de Iterações

A decisão de qual critério deve ser implantado precisa ser avaliada para que o método numérico utilizado proporcione a eficiência necessária para que o problema em questão seja solucionado, uma vez que não é para todas as funções que os critérios de parada são eficazes.

Franco (2006) relata que, embora alguns autores do âmbito do cálculo numérico optem por adotar o critério 1, o mesmo pode falhar quando não se têm em mente uma ideia clara do comportamento da função, pelo fato de poder acontecer o caso que quanto mais distante estiver da raiz exata menor é o valor de $f(x)$. Desta forma, o atendimento do critério 1 não implica necessariamente que x_k encontra-se próximo suficiente da raiz procurada.

Franco (2006) também comenta que outros autores estabelecem como teste de parada o critério 2, que é o erro absoluto. Neste ponto, ele adverte que esse teste torna-se pouco útil quando os números x_{k+1} e x_k forem muito grandes e ϵ for muito pequeno, pois como a raiz procurada terá módulo grande, será muito mais complicado tornar o erro absoluto menor que ϵ .

Por estas razões o autor sugere a utilização do critério 3, chamado de erro relativo. Além disso, é importante que se trabalhe com um limite máximo de iterações, pois em alguns casos, não será possível encontrar uma solução aproximada do zero buscado, porque não é sempre que se tem uma seqüência convergente.

2.3.4 Descrição dos Métodos Estudados

2.3.4.1 Método da Bisseccção

Considere uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$, e que o intervalo $[a, b]$ contenha raiz única. O Método da Bisseccção é uma técnica iterativa que incide em encurtar a amplitude do intervalo que contém a raiz até que se atinja a exatidão necessária, empregando a divisão sucessiva de $[a, b]$ ao meio (RUGGIERO; LOPES).

Ao se aplicar o Método da Bissecção determina-se uma aproximação inicial x_0 , através da divisão ao meio do $[a, b]$, originando os subintervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$. Se $f(x_0) = 0$, então, $\zeta = x_0$; caso contrário, a raiz está contida no subintervalo onde a função tem sinais opostos nos pontos extremos, isto é, se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, logo, $\zeta \in (a, x_0)$; senão $f(b) \cdot f(x_0) < 0$ e $\zeta \in (x_0, b)$.

O novo intervalo $[a_1, b_1]$ que contém ζ é dividido ao meio para obter-se o ponto x_1 (BARROSO et al., 1987). O procedimento é repetido até que se atinja uma aproximação desejada de acordo com o critério de parada utilizado.

A cada iteração, a raiz aproximada é dada por:

$$x_k = \frac{a+b}{2} \quad (6)$$

onde x_k é a raiz aproximada e a e b são os extremos do intervalo.

Uma representação gráfica do Método da Bissecção é esboçada a seguir.

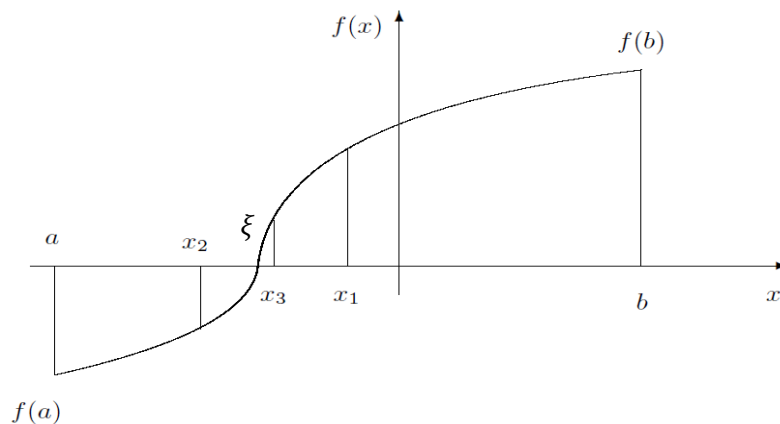


Figura 9 – Interpretação Geométrica do Método da Bissecção
Fonte: Adaptado de Franco (2006).

A Figura 9 ilustra graficamente como são desenvolvidos os procedimentos do Método da Bissecção. Ao verificar que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais contrários, calcula-se a primeira aproximação, ou seja, x_1 , que é o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Visto que x_1 não está suficientemente próximo da raiz ζ é necessário adotar outro intervalo para o cálculo da solução x_2 . Este intervalo é $[a, x_1]$, pois como pode-se perceber $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, logo a raiz está compreendida entre a e x_1 , e a aproximação x_2 é calculada pela divisão ao meio do intervalo $[a, x_1]$. Encontrada a aproximação x_2 , verifica-se se a mesma está próxima quanto se deseja da raiz exata, não estando o processo se repete até que a aproximação encontrada satisfaça o problema.

O algoritmo do Método da Bissecção pode ser descrito da seguinte forma, como sugere Ruggiero; Lopes (1996).

Tabela 2 – Algoritmo do Método da Bissecção

<i>Algoritmo do Método da Bissecção</i>	
Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$, e que o intervalo $[a,b]$ contenha raiz única.	
1) Dados Iniciais:	<ul style="list-style-type: none"> a) Intervalo Inicial $[a, b]$ b) Precisão ϵ
2) Se $(b-a) < \epsilon$, então escolha para x_0 qualquer $x \in [a,b]$. FIM.	
3) $k = 1$	
4) $M = f(a)$	
5) $x = \frac{a+b}{2}$	
6) Se $M = f(x) > 0$, faça $a = x$. Vá para o passo 8.	
7) $b = x$	
8) Se $(b-a) < \epsilon$, escolha para x_0 qualquer $x \in [a,b]$. FIM.	
9) $k = k + 1$. Volte para o passo 5.	

Fonte: Adaptado de Ruggiero; Lopes (1996).

2.3.4.2 Método da Falsa Posição

Seja $f(x)$ uma função, suponha que mesma apresente continuidade em um intervalo $[a,b]$ e que neste intervalo tenha um único ponto no qual $f(x) = 0$.

O Método da Falsa Posição consiste localizar uma raiz aproximada por meio da média ponderada entre a e b , utilizando como pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente (RUGGIERO; LOPES, 1996). A aplicação desses pesos procura beneficiar a busca do menor $f(x)$ gerado por a ou b . Dessa forma, o zero da equação é dado por:

$$x_k = \frac{a|f(b)| - b|f(a)|}{|f(b)| - |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (8)$$

onde a e b são as extremidades do intervalo, e $f(a)$ e $f(b)$ são os valores da função para $x = a$ e $x = b$, respectivamente. Vale lembrar que $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos.

De acordo Franco (2006), se

$$\left| \frac{x_k - a}{x_k} \right| < \epsilon \text{ ou } \left| \frac{x_k - b}{x_k} \right| < \epsilon , \quad (9)$$

sendo ϵ pré-fixado, x_k é a raiz procurada, Caso ocorra o contrário, calcula-se $f(x_k)$ e escolhe-se o ponto entre b e a tal que f apresente sinal oposto ao de $f(x_k)$. Esse procedimento repete-se até que se obtenha a raiz recomendada pela precisão pré-estabelecida. O Método da Falsa posição é exemplificado conforme mostra a Figura 10.

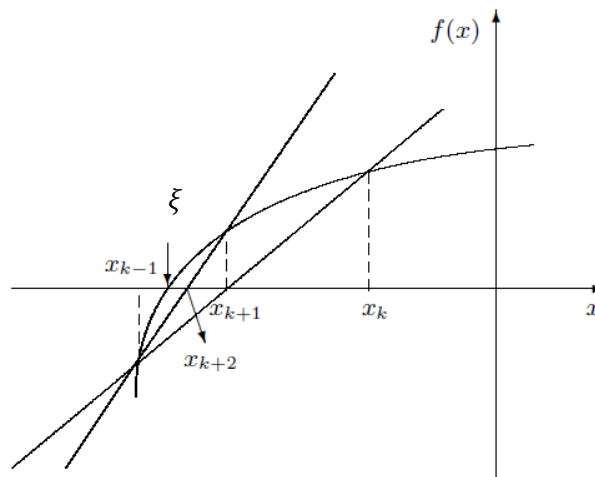


Figura 10 – Interpretação Gráfica do Método da Falsa Posição
Fonte: Adaptado de Franco (2006).

Como pode-se observar através da Figura 10, no Método da Falsa Posição é traçada uma reta que intercepta os pontos $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ da função $f(x)$. Com o propósito de beneficiar o ponto que estiver mais próximo do zero da função, a aproximação seguinte é dada pelo ponto onde a reta (que intercepta os pontos $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$) toca o eixo das abscissas, originando a aproximação x_{k+1} . Observando que a solução x_{k+1} não está próxima da raiz ξ , é adotado um novo intervalo para o cálculo da nova aproximação. Este intervalo é $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ pelo fato de $f(x_{k-1}) \cdot f(x_{k+1}) < 0$. Com isso, é traçada uma nova reta que intercepta os pontos $f(x_{k-1})$ e $f(x_{k+1})$ visto que a aproximação x_{k+2} é dada pelo ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas. É verificado se a aproximação encontrada satisfaz o critério de parada utilizado, caso não satisfaça o processo é repetido até que a aproximação obtida seja a desejada.

Ruggiero; Lopes (1996) discrimina os processos fundamentais para a aplicação do Método da Falsa Posição através do algoritmo mostrado na Tabela 3.

Tabela 3 – Algoritmo do Método da Falsa Posição

Algoritmo do Método da Falsa Posição

Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$, e que o intervalo $[a,b]$ contenha raiz única.

1) Dados Iniciais:

- a) Intervalo Inicial $[a, b]$
- b) Precisão ϵ_1 e ϵ_2

2) Se $(b-a) < \epsilon_1$, então escolha para x_k qualquer $x_k \in [a,b]$. FIM.

Se $|f(a)| < \epsilon_2$ ou se $|f(b)| < \epsilon_2$, escolha b ou a com x_k . FIM

3) $k=1$

4) $M = f(a)$

5)

$$x_k = \frac{a|f(b)| - b|f(a)|}{|f(b)| - |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

6) Se $|f(x_k)| < \epsilon_2$, escolha $x_{k+1} = x_k$. FIM

7) Se $M \cdot f(x_k) > 0$, faça $a = x_k$. Vá para o processo 9.

8) $b = x_k$

9) $b - a < \epsilon_1$, então escolha para x_{k+1} qualquer $x_k \in [a,b]$. FIM

10) $k = k + 1$. Volte ao passo 5.

Fonte: Adaptado de Ruggiero; Lopes (1996).

2.3.4.3 Método do Ponto Fixo

Suponha que a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a,b]$ de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$, e que o intervalo $[a, b]$ contenha uma única raiz.

Ruggiero; Lopes (2006) define o Método do Ponto Fixo como uma técnica que transforma uma equação $f(x)$ em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ munido de uma aproximação inicial x_0 que dá origem a sequência $\{x_k\}$ de aproximações para ξ . Essas aproximações são dadas pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, pois a função $\varphi(x)$ será $f(\xi)$ se e somente se $\varphi(\xi) = \xi$, como descrito na Demonstração 2.

Demonstração 2:

A forma genérica de $\varphi(x)$ é dada por: $\varphi(x) = x + A(x) \times f(x)$, desde que no ponto fixo de $\varphi(x)$, isto é, em ξ , se tenha $A(\xi) \neq 0$.

Com isso,

(\Rightarrow) seja ξ tal que $f(\xi) = 0$.

$\varphi(\xi) = \xi + A(\xi) \times f(\xi) \Rightarrow \varphi(\xi) = \xi$, pois $f(\xi) = 0$.

(\Leftarrow) se $\varphi(\xi) = \xi \Rightarrow \xi + A(\xi) \times f(\xi) = \xi \Rightarrow A(\xi) \times f(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$ (tendo em vista que $A(\xi) \neq 0$). ■

Ruggiero; Lopes (2006) comenta que a função cujo $\varphi(x)$ satisfaz a condição $\varphi(\xi) = \xi$ é chamada de função de iteração para a equação $f(x) = 0$, e que não é para qualquer escolha de $\varphi(x)$ que o processo instituído por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ acarretará em uma sequência convergente, pois é necessário que:

- $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ sejam contínuas em I,
- $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$, e
- $x_0 \in I$.

onde M é um ponto entre zero e um. Com ξ uma raiz de $f(x) = 0$ isolada em um intervalo I centrado em ξ , para que a sequência $\{x_k\}$ promovida por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ convirja para ξ .

Conforme Ruggiere (1996), x_k é escolhido como a raiz aproximada de ξ quando

$$|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1}) - x_{k-1}| < \epsilon \quad (10)$$

ou se $|f(x_k)| < \epsilon$. Uma análise do gráfico do Método do Ponto Fixo é mostrada na Figura 11.

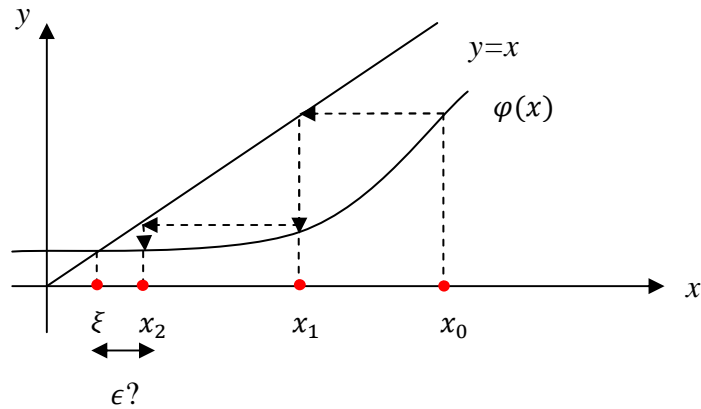


Figura 11 – Esquema Gráfico do Método do Ponto Fixo

Fonte: Autoria Própria (2012).

A Figura 11 apresenta a convergência graficamente do Método do Ponto Fixo. Com isso, nota-se que transforma-se a função y em uma função $y = x$. A função de iteração $\varphi(x)$ origina aproximações que buscam aproximar-se do ponto de interseção das curvas das funções $y = x$ e $\varphi(x)$, de modo que a cada aproximação é verificado se a mesma esta próxima o suficiente da raiz ξ . Isto ocorre, pelo fato do ponto de interseção das curvas ser a raiz exata da função.

O algoritmo do Método do Ponto Fixo é demonstrado a seguir, de acordo com Ruggiero; Lopes (2006).

Tabela 4 – Algoritmo do Método do Ponto Fixo

<i>Algoritmo do Método do Ponto Fixo</i>	
Considere a equação $f(x) = 0$ e a equação equivalente $x = \varphi(x)$.	
Suponha que as hipóteses do Teorema sejam atendidas.	
5) Dados Iniciais:	a) x_0 : aproximação inicial;
	b) Precisoões ϵ_1 e ϵ_2
2) Se $ f(x_0) < \epsilon_1$, faça $x = x_0$. FIM	
3) $k = 1$	
4) $x_1 = \varphi(x_0)$	
5) Se $ f(x_1) < \epsilon_1$ ou se $ x_1 - x_0 < \epsilon_2$, então faça $x = x_1$. FIM	
6) $x_0 = x_1$	
7) $k = k + 1$, volte ao passo 4.	

Fonte: Adaptado de Ruggiero; Lopes (1996).

2.3.4.4 Método de Newton

A finalidade do Método de Newton é tentar garantir e acelerar a convergência do Método do Ponto Fixo, adotando como função de iteração a equação $\varphi(x)$ no qual $|\varphi'(\xi)| = 0$ (RUGGIERO; LOPES, 2006). Logo, dada uma função $f(x) = 0$ e partindo da forma genérica para $\varphi(x)$ objetiva-se encontrar a função $A(x)$ tal que $|\varphi'(\xi)| = 0$.

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow \quad (11)$$

$$\Rightarrow |\varphi'(x)| = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x) \quad (12)$$

$$\Rightarrow |\varphi'(\xi)| = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) \Rightarrow |\varphi'(\xi)| = 1 + A(\xi)f'(\xi) \quad (13)$$

Assim,

$$|\varphi'(\xi)| = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}, \quad (14)$$

tomando $A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$, então, dada uma $f(x)$, a equação de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ apresentará $|\varphi'(\xi)| = 0$. Porquanto verifica-se que:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad (15)$$

e, por $f(\xi) = 0$, $\varphi(\xi) = 0$ desde que $f'(\xi) \neq 0$.

No Método de Newton, escolhida a aproximação x_0 , a sequência x_k é gerada por $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, com $k = 0, 1, 2, \dots$. O método é convergente sempre que $|x_0 - \xi|$ for satisfatoriamente pequeno.

O Método de Newton pode ser interpretado graficamente com mostra a Figura 12.

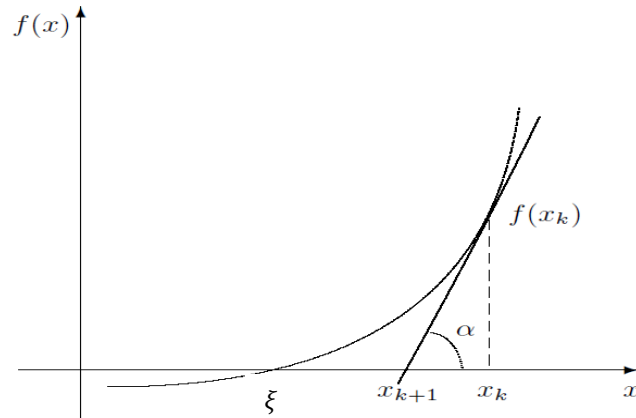


Figura 12. – Gráfico representativo do Método de Newton
Fonte: Adaptado de Franco (2006).

O gráfico representativo do Método de Newton esboça na Figura 12 a convergência do método, por meio da reta tangente a curva da função em um ponto. Esta convergência é realizada tomando uma aproximação inicial x_k , que geralmente é o ponto médio do intervalo que contém uma raiz. Como normalmente a aproximação inicial não satisfaz o critério de parada adotado no problema, é calculada a aproximação seguinte através da equação $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. A aproximação x_{k+1} é o ponto em que a reta tangente à curva da função em x_k intercepta o eixo x (eixo das abscissas). Após encontrar a solução x_{k+1} , analisa-se se a mesma está próxima suficientemente do zero da função, caso não esteja é calculado novamente a raiz aproximada até que o critério de parada seja atendido.

Ruggiero; Lopes (1996) descreve o algoritmo do Método de Newton da como mostra a Tabela 5.

Tabela 5 – Algoritmo do Método de Newton

<i>Algoritmo do Método de Newton</i>	
Seja a equação $f(x) = 0$.	
Suponha que $f'(\xi) \neq 0$, e que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = \xi$.	
1) Dados Iniciais:	<ul style="list-style-type: none"> a) x_0: aproximação inicial; b) ϵ_1 e ϵ_2: Precisoões
2)	Se $ f(x_0) < \epsilon_1$, faça $\xi = x_0$. FIM.
3)	$k = 1$
4)	$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
5)	Se $ f(x_1) < \epsilon_1$ ou se $ x_1 - x_0 < \epsilon_2$, então faça $\xi = x_1$. FIM.
6)	$x_0 = x_1$
7)	$k = k + 1$, volte ao passo 4.

Fonte: Adaptado de Ruggiero; Lopes (1996).

2.3.4.5 Método da Secante

Franco (2006) aponta como desvantagem ao Método de Newton o fato de ser necessário obter a $f'(x)$ e calcular seu valor numérico a cada iteração. Porém, há algumas formas de modificar o Método de Newton para que essa desvantagem seja eliminada (FRANCO, 2006). Uma forma de efetuar essa modificação é substituir a derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (16)$$

onde x_k e x_{k-1} são duas aproximações para a raiz ξ . Logo, o Método de Newton que é dado por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (17)$$

e modificado para:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})}} \quad (18)$$

Desenvolvendo a equação acima tem-se a expressão simplificada:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (19)$$

Segundo Aremeles; Darezzo (2008) quando a alteração desenvolvida no Método de Newton acontece desta forma, o método passa ser chamado Método da Secante. Observe que, neste caso realiza-se a troca da inclinação da reta tangente pela inclinação da reta secante à curva. A Figura 13 mostra o comportamento gráfico do Método da Secante.

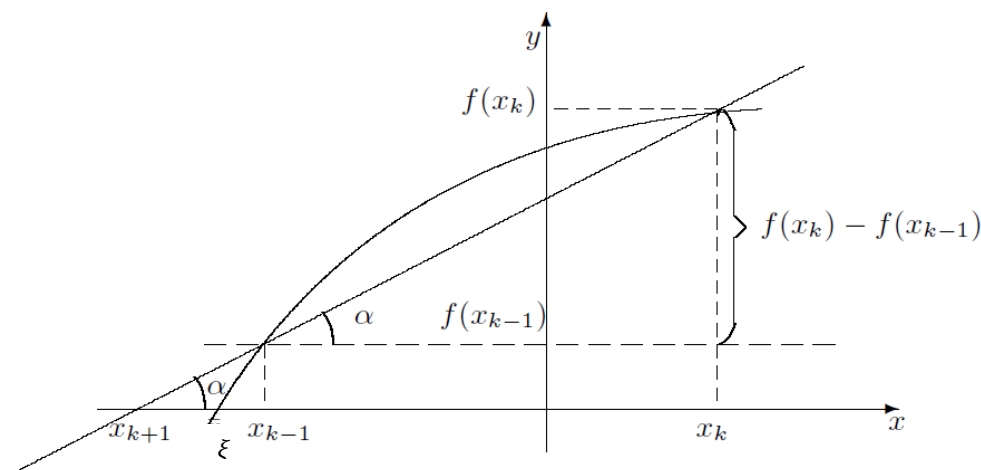


Figura 13 – Ilustração Geométrica do Método da Secante

Fonte: Adaptado de Franco (2006).

A figura acima apresenta o processo de convergência do Método da Secante, que é dado por meio de uma reta secante a curva da função que intercepta os pontos $f(x_k)$ e $f(x_{k-1})$ da função, quando x assume o valor das aproximações iniciais x_{k-1} e x_k . Com isso raiz aproximada x_{k+1} é dada pelo ponto onde a reta secante toca o eixo das abscissas. Encontrado o valor de x_{k+1} observa-se se o mesmo está próximo o suficiente da raiz ξ , pois se a aproximação x_{k+1} não for a procurada é realizado novamente o processo para encontrar uma nova aproximação.

Franco (2006) destaca que, graficamente, o Método da Secante leva em consideração como aproximação consequente a interseção das cordas que ligam os pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$ com o eixo x . Fazendo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (20)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{f(x_k)} = \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_{k-1} - x_k} = \operatorname{tg} \alpha \quad (22)$$

Aremeles; Darezzo (2008) atenta para convergência do Método da Secante, uma vez que a mesma é decorrente do Método de Newton e assim possui condições de convergência similares. Entretanto quando se tem $f'(x_k) \cong f(x_{k-1})$ pode surgir problemas referentes à convergência, isto é, a sequência originada pelo método pode divergir da raiz procurada.

Segundo Ruggiero; Lopes (2006), o algoritmo do método é apresentado a seguir.

Tabela 6 – Algoritmo do Método da Secante

<i>Algoritmo do Método da Secante</i>	
Seja a equação $f(x) = 0$.	
1) Dados Iniciais:	
a)	x_0 e x_1 : Aproximações iniciais;
b)	ϵ_1 e ϵ_2 : Precisão
2) Se $ f(x_0) < \epsilon_1$, faça $\xi = x_0$. FIM.	
3) Se $ f(x_1) < \epsilon_1$ ou se $ x_1 - x_0 < \epsilon_2$, então faça $\xi = x_1$. FIM.	
4) $k = 1$	
5) $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} (x_1 - x_0)$	
6) Se $ f(x_2) < \epsilon_1$, ou se $ x_2 - x_1 < \epsilon_2$ faça $\xi = x_2$. FIM.	
7) $x_0 = x_1$	
$x_1 = x_2$	
8) $k = k + 1$. Volte ao passo 5.	

Fonte: Adaptado de Ruggiero; Lopes (1996).

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, é realizado um estudo acerca do funcionamento e aplicabilidade métodos descrito anteriormente, mediante análises de exemplos de funções polinomiais e transcendentais.

3.1 FUNÇÕES CONSIDERADAS NO TESTE NUMÉRICO

Para exemplificar a execução dos métodos, foram escolhidas do livro de Campos Filho (2010) cinco funções e seus respectivos intervalos. As funções e os intervalos escolhidos são os seguintes:

$$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0, \xi \in [0,3]. \quad (23)$$

$$f_2(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24 = 0, \xi \in [0,5]. \quad (24)$$

$$f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 = 0, \xi \in [-5,5]. \quad (25)$$

$$f_4(x) = \text{sen}(x)x + 4 = 0, \xi \in [1,5]. \quad (26)$$

$$f_5(x) = (x - 3)^5 \log_e(x) = 0, \xi \in [2,5]. \quad (27)$$

Para todos os métodos estudados foi utilizado o mesmo critério de parada: $|f(x_k)| \leq \epsilon$, a mesma tolerância $\epsilon = 10^{-10}$ e número máximo de 500 iterações. Para o Método de Newton e do Ponto Fixo adotou-se como raiz inicial (x_0) o ponto médio do intervalo.

Para encontrar a raiz aproximada das equações empregando os métodos iterativos primeiramente desenvolve-se a fase 1 (isolamento da raiz), ou seja, tem-se que verificar se o intervalo tomado contém a raiz, para isso foi efetuado o tabelamento da função e esboçado o gráfico com amplitude de 0,5 para cada exemplo. Depois de determinado o intervalo executa-se a fase 2 (refinamento), onde ocorre a implementação de todos os métodos para o intervalo escolhido.

Todos os algoritmos foram implementado em rotinas de SCILAB - 5.3.2, em um computador que possui processador Intel Core2 Quad, com 4 Gb de memória RAM, e com sistema operacional Windows 7 de 32 bits. Na seqüência serão expostos os exemplos em

questão.

3.1.1 Emprego dos Métodos na Função $f_1(x)$

Considere a função $f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0$ com raiz ξ pertencente ao intervalo $[0,3]$. Para definir a raiz aproximada usando os Métodos da Bissecção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante, antes é preciso confirmar que a raiz da função está no intervalo sugerido. Para isso realizou-se o tabelamento, Tabela 7, da função $f_1(x)$.

Fase 1 – Isolamento da Raiz:

Tabela 7 – Tabelamento da Função $f_1(x)$ no Intervalo $[0,3]$

x	$f(x)$	Sinal de $f(x)$
0	-15	-
0,5	-18,652	-
1	-16	-
1,5	0,375	+
2	41	+
2,5	119,375	+
3	252	+

Fonte: Aatoria Própria (2012).

Observando as informações apresentadas na Tabela 7, percebe-se que há uma mudança de sinal na função no ponto 1,5 em relação ao ponto anterior 1, pois $f(1) = -16$ e $f(1,5) = 0,375$. A oposição de sinais da função, como no caso descrito anteriormente, implica que há pelo menos um ponto neste intervalo onde a função é zero. Por meio do gráfico ilustrado na Figura 14 é perceptível que esse ponto é único.

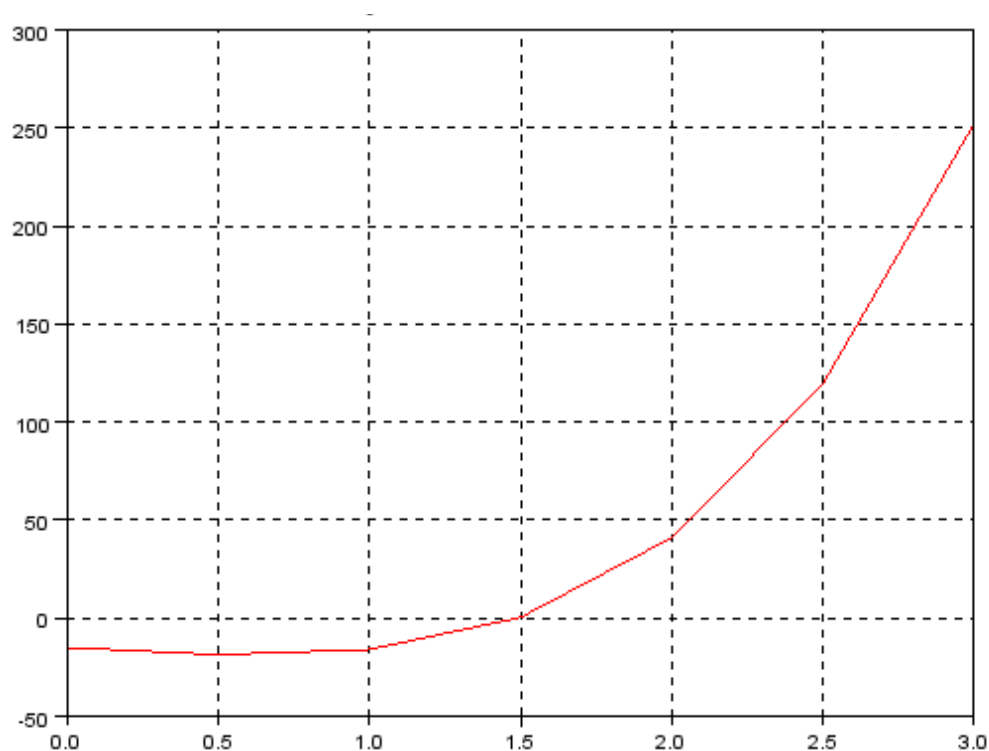


Figura 14 – Gráfico da Função $f_1(x)$ no intervalo $[0,3]$

Fonte: Autoria Própria (2012).

Fase 2 – Refinamento:

Após verificar que a raiz se encontra entre zero e três, foi realizado a execução dos Métodos da Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante no software SCILAB, utilizando função de iteração $f_i(x) = \frac{(2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 15)}{10}$ no Método do Ponto Fixo. Os resultados das raízes encontradas estão na Tabela 8.

Tabela 8 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 1

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução (s)
Bisseção	1,492879	38	-	1,79
Falsa Posição	1,492879	78	-	4,64
Ponto Fixo	-	6	Sim	0,30
Newton	1,492879	3	-	0,20
Secante	-1,300384	9	Sim	0,39

Fonte: Autoria Própria (2012).

A tabela acima traz os valores da raiz aproximada determinada por todos os métodos, a quantidade de iterações necessária para chegar a essa raiz, se houve erro no processo para encontrá-la e o tempo de execução dos métodos.

Por meio dos dados expostos na Tabela 8, pode-se observar que os métodos diferem no número de operações realizadas para atingir a solução, pois alguns necessitaram de mais iterações para convergir para a solução, como no caso dos Métodos da Bisseção e Falsa Posição, e outros convergiram com um número reduzido de iterações, como o Método de Newton, o qual, embora necessite a cada iteração calcular a derivada da função no ponto, só foram necessárias três iterações para convergir. O Método da Secante, apesar de ter realizado um número relativamente pequeno iterações comparando com a maioria dos métodos, encontrou a raiz fora do intervalo requerido no exemplo.

A técnica do Ponto Fixo não obteve sucesso para a função de iteração adotada, pois a função obteve valores altos tendendo a infinito.

3.1.2 Emprego dos Métodos na Função $f_2(x)$

O segundo exemplo a ser analisado é a função $f_2(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24 = 0$ com raiz ξ presente em $[0,5]$. Assim como realizado no exemplo 1, para encontrar a raiz aproximada da função primeiramente foi verificado se a raiz está localizada no intervalo proposto através de uma análise do tabelamento de $f_2(x)$.

Fase 1 – Isolamento da Raiz:

Tabela 9 – Tabelamento da Função $f_2(x)$ no Intervalo $[0,5]$

x	$f(x)$	Sinal de $f(x)$
0	-24	-
0,5	-17,71875	-
1	-8	-
1,5	-1,40625	-
2	0	Neutro (Raiz)
2,5	2,40625	+
3	24	+
3,5	98,71875	+
4	280	+
4,5	644,53125	+
5	1296	+

Fonte: Autoria Própria (2012).

Conforme os dados da Tabela 9, é perceptível que a função quando submetida aos pontos do intervalo $[0,5]$ com uma amplitude de 0,5, possui comportamento crescente e apresenta raiz. Com isso os métodos podem ser aplicados e executados, visto que o intervalo possui raiz única. O gráfico da função $f_2(x)$ (Figura 15) também permite este entendimento, embora que a princípio possa-se pensar que a função seja constante em determinados pontos.

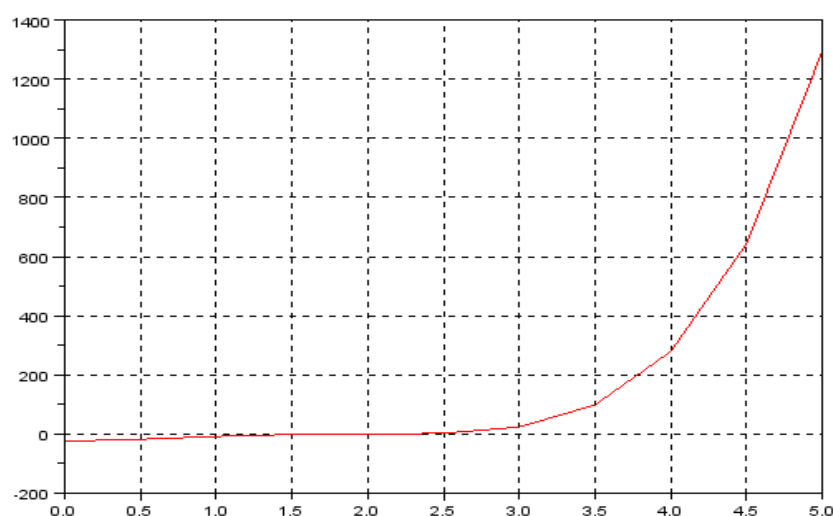


Figura 15 – Gráfico da Função $f_2(x)$ no Intervalo $[0,5]$

Fonte: Autoria Própria (2012).

Fase 2 – Refinamento:

Com a primeira fase da resolução do exemplo 2 concluída, aplicou-se aos Métodos da Bissecção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante na função $f_2(x)$. Para Método do Ponto Fixo dotou-se a função de iteração $f_i(x) = \frac{(-x^5+2x^4+9x^3-22x^2+24)}{4}$.

Tabela 10 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 2

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução (s)
Bissecção	2,000122	13	-	0,61
Falsa Posição	1,823557	500	Sim	30,48
Ponto Fixo	1,983802	500	Sim	29,61
Newton	2,000170	20	-	1,33
Secante	2,000178	29	-	1,34

Fonte: Autoria Própria (2012).

Conforme os dados descritos na Tabela 10, percebe-se que o Método de Newton e o da Secante encontraram praticamente a mesma raiz, diferindo apenas na sexta casa decimal e no número de iterações. A técnica de Newton desenvolveu nove iterações a menos que a da Secante, mas com uma diferença de um centésimo de segundo.

Já o Método da Falsa Posição necessitou realizar o número máximo de iterações para encontrar uma raiz que não se aproximou da raiz real encontradas pelos demais métodos. A convergência desse método se deu de forma muito lenta, o que exige um esforço computacional elevado. Caso semelhante ocorreu com o Método do Ponto Fixo que obteve após quinhentas iterações uma raiz aproximada distante da raiz real, porém mais próxima do que a determinado pelo Método da Falsa Posição. Nesse experimento, o método que mostrou mais eficiência foi o da Bissecção por ter encontrado a raiz que mais se aproxima da raiz real, por ter realizado o menor número de iterações e ter tido menor tempo dentre os cinco métodos aplicados.

3.1.3 Emprego dos Métodos na Função $f_3(x)$

Seja a função $f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 = 0$ e sua raiz ξ pertença ao

intervalo $[-5,5]$. Para determinar a raiz aproximada de $f_3(x)$, foi verificado se a mesma está inclusa no intervalo, efetuando o tabelamento de $f_3(x)$, em $[-5,5]$.

Fase 1 – Isolamento da Raiz:

Tabela 11 – Tabelamento da Função $f_3(x)$ no Intervalo $[-5,5]$

x	$f(x)$	Sinal de $f(x)$
-5	-58477,53472	-
-4,5	-21780,09442	-
-4	-8168,236163	-
-3,5	-3092,132497	-
-3	-1180,447941	-
-2,5	-448,7860877	-
-2	-162,5821779	-
-1,5	-48,49006761	-
-1	-3,362208694	-
0	18,29	+
1	26,17129862	+
1,5	39,05957348	+
2	63,53360825	+
2,5	103,5553158	+
3	163,003166	+
3,5	245,6860188	+
4	355,3454248	+
4,5	495,6638604	+
5	670,2835353	+

Fonte: Autoria Própria (2012).

Ao substituir os pontos do intervalo com uma amplitude de 0,5 na função, como mostra a Tabela 11, pode-se notar que em um determinado período a função muda de sinal passando de $f(-1) = -3,362208694$ para $f(0) = 18,29$, isso nos diz que o intervalo possui raiz. Por meio do gráfico de $f_3(x)$ (Figura 16), nota-se que é difícil a visualização da unicidade da raiz no intervalo $[-5,5]$.

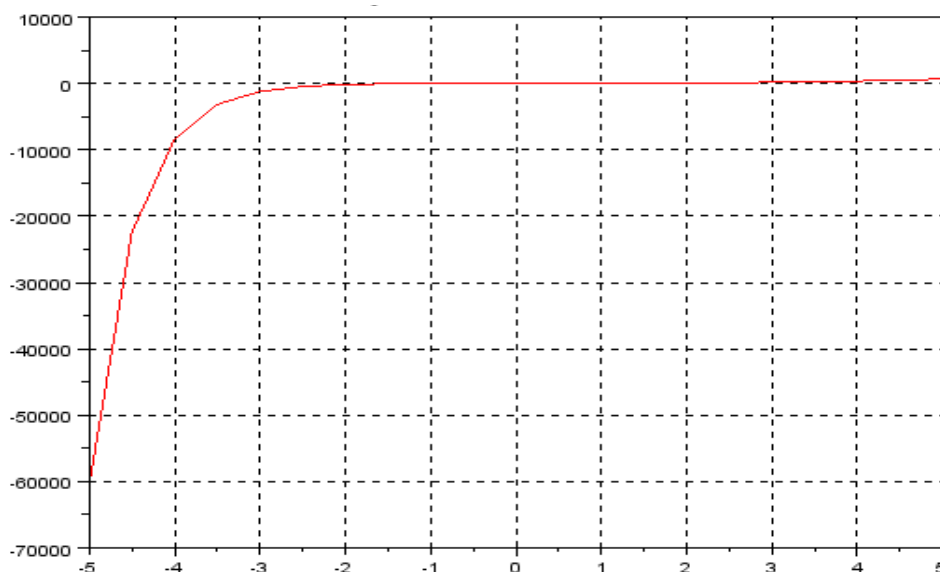


Figura 16 – Gráfico da Função $f_3(x)$ no Intervalo $[-5,5]$
 Fonte: Autoria Própria (2012).

Fase 2 – Refinamento:

Na segunda fase foi feita uma análise dos Métodos da Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante na função $f_3(x)$. Para este caso, a função de iteração adotada para o Método do Ponto é $fi(x) = [-5x^3 + e^{(1-2x)} - \cos(x) - 20]^{\frac{1}{2}}$.

Tabela 12 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 3

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução
Bisseção	-0,929560	42	-	2,02
Falsa Posição	0,698715	500	Sim	29,73
Ponto Fixo	-	3	Sim	0,16
Newton	-0,929560	10	-	0,47
Secante	-0,929560	21	-	0,97

Fonte: Autoria Própria (2012).

De acordo com os dados da tabela acima, pode-se observar que neste exemplo, assim como ocorreu no exemplo 1, o Método do Ponto Fixo apresentou erro, pois gerou uma sequência de iterações que proporcionaram a função resultados que tendem ao infinito, ou seja, valores que se distancia muito do zero da equação.

O processo de convergência para raiz aproximada através da técnica da Falsa Posição

aconteceu lentamente de modo que ao atingir o número máximo de iterações o valor encontrado foi 0,698715, distante da aproximação da deseja e localizada pelos os demais métodos.

Os métodos da Bisseção, Newton e Secante obtiveram raiz de valor -0,929560 com 42, 10 e 21 iterações respectivamente. Com isso, percebe-se que o método de Newton se destacou ao encontrar o resultado desejado em um tempo pequeno e com um baixo número de iteração em relação aos outros métodos.

3.1.4 Emprego dos Métodos na Função $f_4(x)$

Considerando a equação: $f_4(x) = \text{sen}(x)x + 4 = 0$, que por sua vez tem raiz ξ localizado no intervalo $[1,5]$, para encontrar uma aproximação de ξ com a implementação dos métodos bissecção, falsa posição, ponto fixo, Newton e secante na função $f_4(x)$.

Fase 1 – Isolamento da Raiz:

Será apresentado por meio do tabelamento da função $f_4(x)$, a comprovação da existência de raiz compreendida no intervalo $[1,5]$.

Tabela 13 – Tabelamento da Função $f_4(x)$ no Intervalo $[1,5]$

x	$f(x)$	Sinal de $f(x)$
1	4,841470985	+
1,5	5,49624248	+
2	5,818594854	+
2,5	5,49618036	+
3	4,423360024	+
3,5	2,772258703	+
4	0,972790019	+
4,5	-0,398885529	-
5	-0,794621373	-

Fonte: Autoria Própria (2012).

Realizando a análise da Tabela 13, é possível comprovar a existência de raiz, pois nota-se que há uma inversão de sinal da função no ponto 4 em relação a função no ponto 4,5, de forma que entre as imagens de $[1,5]$ pelo menos uma tem valor zero. Contudo, sabe-se que é necessário para o emprego dos métodos que a raiz seja única. Esta unicidade pode ser vista através do gráfico da Figura 17.

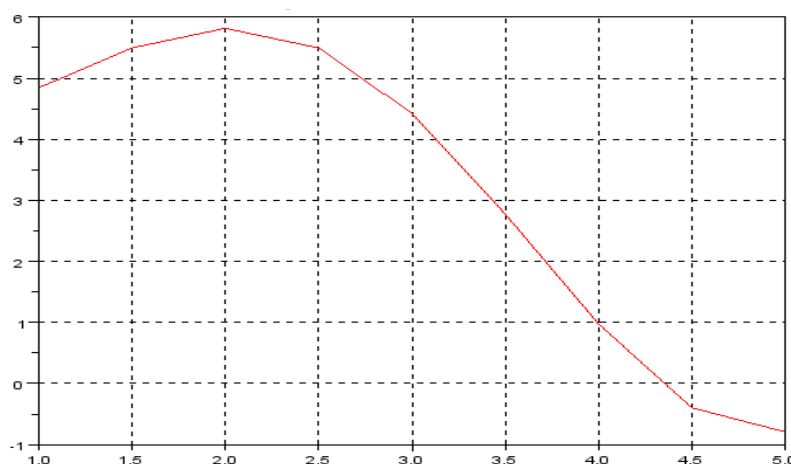


Figura 17 – Gráfico da Função $f_4(x)$ no Intervalo $[1,5]$

Fonte: Autoria Própria (2012).

Fase 2 – Refinamento:

Após a análise da unicidade da raiz, aplicou-se os Métodos da Bisseccção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante na função $f_4(x)$ tomando a função de iteração $fi(x) = \frac{-4}{\text{sen}(x)}$ para o Método Ponto Fixo.

Tabela 14 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 4

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução (s)
Bisseccção	4,323240	34	-	2,27
Falsa Posição	4,323240	9	-	0,56
Ponto Fixo	4,004601	500	Sim	29,22
Newton	4,323240	5	-	0,33
Secante	4,323240	6	-	0,27

Fonte: Autoria Própria (2012).

Analisando a Tabela 14 é notável que com exceção do Ponto Fixo, todos os métodos

originaram o resultado 4,323240 para a raiz aproximada, todavia com números de iterações diferente. Apesar do Método de Newton ter apresentado o menor número de iterações, foi o método da secante que apresentou o melhor performance, pois encontrou a mesma raiz aproximada com menor tempo de execução.

3.1.5 Emprego dos Métodos na Função $f_5(x)$

A quinta análise realizada procura encontrar, por meio dos métodos estudados, a raiz ξ de $f_5(x) = (x - 3)^5 \log_e(x) = 0$ no intervalo [2,5].

Fase 1 – Isolamento da Raiz:

Na fase 1, foram empregada os pontos contidos em [2,5] com uma amplitude de 0,5 na função $f_5(x) = (x - 3)^5 \log_e(x)$. Os valores da função nos pontos do referido intervalo estão expressos na Tabela 15.

Tabela 15 – Tabela da Função $f_5(x)$ no Intervalo [2,5]

	$f(x)$	Sinal de $f(x)$
2	-0,695268699	-
2,5	-0,028721726	-
3	0	Neutro (Raiz)
3,5	0,039268666	+
4	1,390537398	+
4,5	11,45654584	+
5	51,65964564	+

Fonte: Aatoria Própria (2012).

Como está explícito na Tabela 15, ver-se que realmente a raiz está inclusa no intervalo [2,5], pois para $x = 3$ $f(x)=0$. Neste exemplo, não seria necessário aplicar os métodos tendo em vista que através do tabelamento sabe-se qual é a raiz, porém como o objetivo do trabalho é demonstrar a funcionalidade dos métodos, mesmo assim realizou-se a aplicação dos mesmos.

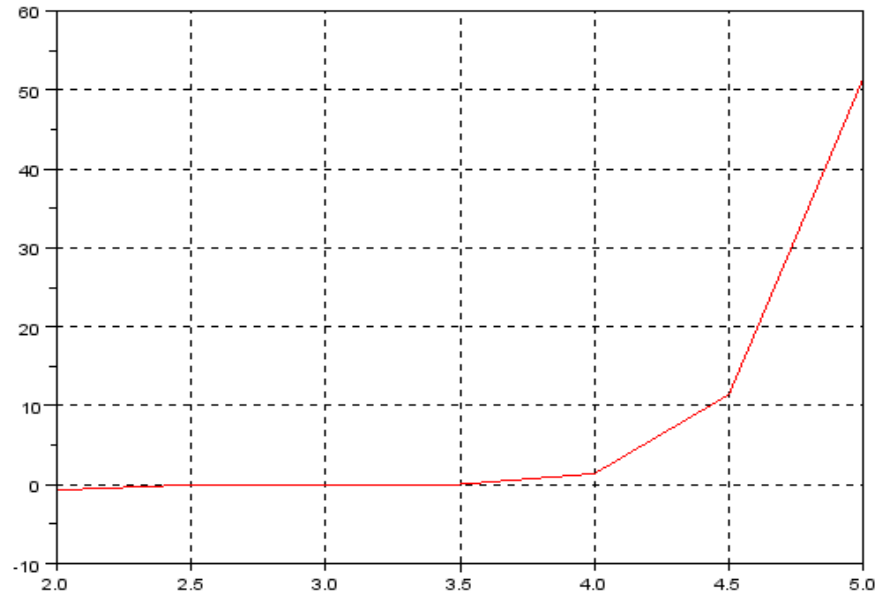


Figura 18 – Gráfico da Função $f_5(x)$ no Intervalo $[2,5]$
 Fonte: Autoria Própria (2012).

Fase 2 – Refinamento:

Na fase 2 foi feita a aplicação dos Métodos da Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante na função $f_5(x)$. Os resultados da aplicação desses métodos encontram-se na Tabela 16.

Neste exemplo, o Método do Ponto Fixo não pôde ser executado com êxito devido à função ter configuração: $f_5(x) = (x - 3)^5 \log_e(x)$, tornando complexo a obtenção da função de iteração.

Tabela 16 – Resultados da Raiz Encontrada Utilizando os Métodos no Exemplo 5

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução (s)
Bisseção	3,007813	7	-	0,33
Falsa Posição	2,67554	500	-	28,88
Ponto Fixo	-	-	Sim	-
Newton	3,009296	18	-	0,86
Secante	2,991008	30	-	1,41

Fonte: Autoria Própria (2012).

Nessa análise, os Métodos da Bisseção e de Newton apresentaram raízes semelhantes,

no entanto a Bissecção só realizou sete iterações para encontrar este valor enquanto o Método de Newton 18. O método que obteve o resultado mais próximo da raiz exata foi o da Secante, porém foi o segundo método que realizou mais iterações.

3.1.6 Desempenho Geral dos Métodos Aplicados

Ao observar os resultados, percebe-se que a maioria dos métodos apresentou as soluções desejadas, porém com desempenhos diferentes em virtude dos mesmos possuírem atributos peculiares que os diferem tanto na idéia que é fundamentada, quanto na teoria abordada para chegar até raiz aproximada, como no procedimento realizado para o calculo da mesma.

A técnica da Bissecção mostrou-se ao longo dos exemplos propostos ser eficiente no que diz respeito ao objetivo principal, que é encontrar uma aproximação para raiz em um determinado intervalo com uma precisão ϵ . Entretanto, o procedimento de encurtar a amplitude do intervalo que contém a raiz empregando a divisão sucessiva do intervalo ao meio, faz com que o método, em alguns casos, necessite realizar um numero elevado de iterações em relação aos demais métodos e com isso pode-se haver um aumento do tempo gasto para que o método seja executado.

O Método da Falsa Posição apresentou os resultados buscados apenas para as funções $f_1(x)$ e $f_4(x)$. Observa-se nos outros exemplos que o método não foi eficiente, pois a função tangencia o eixo das abscissas por um grande intervalo, o que acaba dificultando a aplicação dos pesos $f(a)$ e $f(b)$ nos extremos dos intervalos. Em funções que não possuem essa característica, o método mostrou-se eficiente.

O Método Ponto Fixo, assim com a técnica da Falsa Posição, realizou em alguns exemplos o numero máximo de iterações e não convergiu para a raiz aproximada desejada. Nos outros exemplos (onde não foi necessário realizar o número limite de iterações) o método apresentou erro devido à função ter gerado soluções aproximadas com valores que tendem ao infinito, distanciando assim, a função do zero. Um dos fatores que podem ter ocasionado a ineficiência deste método é a função de iteração escolhida, pois não é para qualquer função de iteração que o método gera uma sequência de soluções convergente.

Ao contrario dos Métodos da Falsa Posição e Ponto Fixo, o Método de Newton apresentou resultados após poucas iterações, com a precisão esperada e com rapidez. Embora

seja realizado o cálculo da derivada da função, o mesmo ainda mostrou velocidade na execução.

O Método da Secante, assim como o Método de Newton, foi efetuado com rapidez e realizou poucas iterações. Quanto à exatidão das raízes aproximadas, apenas para $f_5(x)$ o método não foi tão preciso quanto os outros e para $f_1(x)$ ocorreu erro na performance do método, pois o mesmo encontrou uma raiz aproximada fora do intervalo sugerido.

Vale salientar que não é para todos os casos que um baixo número de iteração representará velocidade na execução do método. Prova disto ocorreu na análise de $f_4(x)$ onde o Método da Secante gerou seis iterações em um tempo de 0,27 segundos e o Método de Newton apresentou cinco iterações em 0,33 segundos, ou seja, apesar da técnica da Secante ter efetuado mais iterações a ela encontrou a mesma raiz aproximada com maior rapidez que o Método de Newton, que realizou menos iterações. Neste caso como os tempos foram muito pequenos, dificilmente seria notada a diferença nos tempos de execução dos Métodos da Secante e Newton, porém é importante destacar a possibilidade deste evento ocorrer, tendo em vista que em outros casos o tempo de finalização dos métodos pode ser bem maior dos observados nos exemplos abordados neste trabalho.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As raízes das funções são pontos específicos do domínio que possuem a capacidade de tornar nulas as equações. Taís pontos (raízes) quando conhecidos possibilitam a aplicação em problemas práticos de diversas áreas do conhecimento. Todavia, há uma carência de métodos diretos que calcule essas raízes, tendo em vista que apenas para um número resumido de funções este cálculo é realizado analiticamente.

Ao perceber importância da aplicabilidade dos zeros de funções, bem com a ausência de artifícios matemáticos diretos que encontrem raízes de equações específicas, como polinomiais e transcendentais, o presente trabalho efetuou uma revisão bibliográfica sobre alguns métodos para encontrar as raízes reais de funções transcendentais e polinomiais. Os métodos numéricos abordados nesta pesquisa foram: Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante, que constituem processos iterativos que originam soluções aproximadas para a raiz de uma equação partindo de uma aproximação inicial.

Nesta pesquisa buscou-se: analisar os aspectos teóricos e práticos referentes à aplicação dos métodos numéricos; analisar a situação em que cada método converge para a sua solução aproximada; analisar os parâmetros de cada método e sua influência no resultado final e por realizar um comparativo analítico dos métodos na solução de alguns problemas de teste.

Com isso, nota-se que os métodos estudados têm suas especificidades e características que influenciam o seu desempenho. Um parâmetro fundamental identificado nos métodos são as condições de convergência para a raiz, que podem ser: a unicidade da raiz no intervalo trabalhado, a função de iteração escolhida no caso do Método do Ponto Fixo, etc. Através dessas condições sabe-se se haverá convergência e como ela ocorrerá. Outro fator importante para que os métodos numéricos sejam aplicados com sucesso é a realização de uma análise prévia da função, para que se escolha o método mais adequado ao problema, evitando assim, que se utilize um método que não venha ser implantado com eficiência no problema estudado.

Com a aplicação das funções consideradas, nos Métodos da Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton e Secante, observou-se que para alguns casos um pequeno número de iterações não significa que o método será veloz na sua execução, pois a velocidade da execução do mesmo também depende do esforço computacional que está sendo produzido. Em geral, a implementação dos métodos numéricos nos problemas de testes forneceram resultados satisfatórios, pois determinaram soluções aproximadas para as raízes com precisão, mostrando-se úteis para a resolução dos problemas do tipo $f(x)=0$.

Dessa forma, pode-se observar que, na ausência de modelos diretos para a obtenção de raízes de alguns tipos de equações, os métodos numéricos são a ferramenta mais adequada para se atingir os objetivos. Conforme dito, sua eficiência e eficácia dependem de vários fatores, os quais foram expostos e analisados no presente trabalho. A principal diferença entre os métodos vistos no presente estudo diz respeito a estratégia geral adotada para o refinamento da raiz, desde argumentos simplistas, como o Método da Bisseção, bem como argumentos mais elaborados, como no Método de Newton ou da Secante, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ARENALES, Selma; DAREZZO, Arthur. **Cálculo Numérico: Aprendizagem com Apoio de Software**. 2 ed. São Paulo: Thompson Learning, 2008.

BARROSO, Leônidas Conceição et al. **Cálculo Numérico** . São Paulo: Harbra Ltda, 1987.
Boyer, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blucher, 1974.

BURDEN, Richard L. E Faires, Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: CENGAGE 2008.

CAMPOS FILHO, Frederico Ferreira. **Algoritmos Numéricos**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

FRANCO, Neide Bertold. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice Hall, 2006.

FREITAS, Sergio Roberto. **Métodos Numéricos**. **Cidade** :Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2000. Material em PDF perguntar a Matheus se é livro e como referenciar.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro : LTC, 1985.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed. Rio de Janeiro : LTC, 2001.

HASS, Joel et al. **Cálculo**. 11.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha . **Calculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação**. 3 ed. rev. atual. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken. **Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

STEWART, James. **Cálculo**. 5 ed. São Paulo:Thomson Learning, 2006.

APÊNDICE A – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DOS MÉTODOS

Com o intuito demonstrar a aplicabilidade os métodos estudados nesta pesquisa bibliográfica, retiramos 2 exemplos do livro de Campos Filho (2010) 1 exemplo do livro de Barroso et al.(1987) para serem solucionados no presente trabalho. Tais exemplos são problemas práticos de caráter simples pertinentes as áreas da engenharia e da matemática financeira, entretanto os métodos vistos aqui podem ser úteis em situações reais muito mais complexas.

Para todos os métodos foram utilizado o critério de parada: $|f(x_k)| \leq \epsilon$, uma tolerância $\epsilon = 10^{-5}$ com um número máximo de iterações de 500. Para o Método de Newton e do Ponto Fixo utilizou-se como raiz inicial (x_0) o ponto médio do intervalo. Todos os métodos foram executados no software SCILAB.

A.1 JUROS DE FINANCIAMENTO

A.1.1 Definição do Problema

Um produto a vista custa R\$ 1.100,00, entretanto ele pode ser financiado por dois planos, que são os escritos abaixo.

Plano 1: Entrada de R\$ 100,00 e 6 parcelas de R\$ 224,58 .

Plano 2: Sem entrada e 10 parcelas de R\$ 163,19.

Qual a taxa de juros implantada em cada plano?

A.1.2 Modelagem Matemática

Da matemática financeira tem-se que:

$$\frac{1-(1+j)^{-p}}{j} = \frac{v-e}{m}, \quad (1)$$

onde j é a taxa de juros, p o prazo, v o preço à vista, e a entrada e m a mensalidade.

Rearranjando a expressão acima temos:

$$f(j) = \frac{1-(1+j)^{-p}}{j} - \frac{v-e}{m} = 0. \quad (2)$$

Com essa configuração, o problema determinar a taxa de juros do financiamento recai em calcular a raiz de uma equação transcendente.

A.1.3 Solução Numérica

Para calcular a raiz, primeiramente iremos localizar o intervalo que a raiz está contida e posteriormente implantaremos os métodos vistos no decorrer deste trabalho. As equações para cada plano são:

$$f_1(j) = \frac{1-(1+j)^{-6}}{j} - \frac{1.100-100}{224,58} = 0, \text{ e} \quad (3)$$

$$f_2(j) = \frac{1-(1+j)^{-10}}{j} - \frac{1.100-0}{163,19} = 0 \quad (4)$$

As figuras abaixo trazem o esboço das funções $f_1(j)$ e $f_2(j)$ e mostram o intervalo $[0,05; 0,1]$ onde a raiz está inserida.

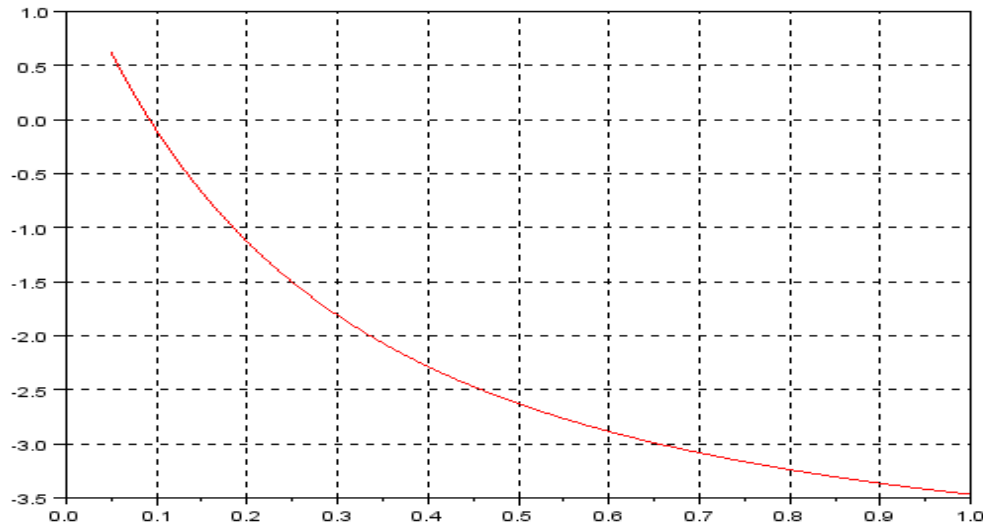


Figura 1 – Isolamento da Raiz para Cálculo da Taxa Juro da Função $f_1(j)$

Fonte: Autoria Própria (2012).

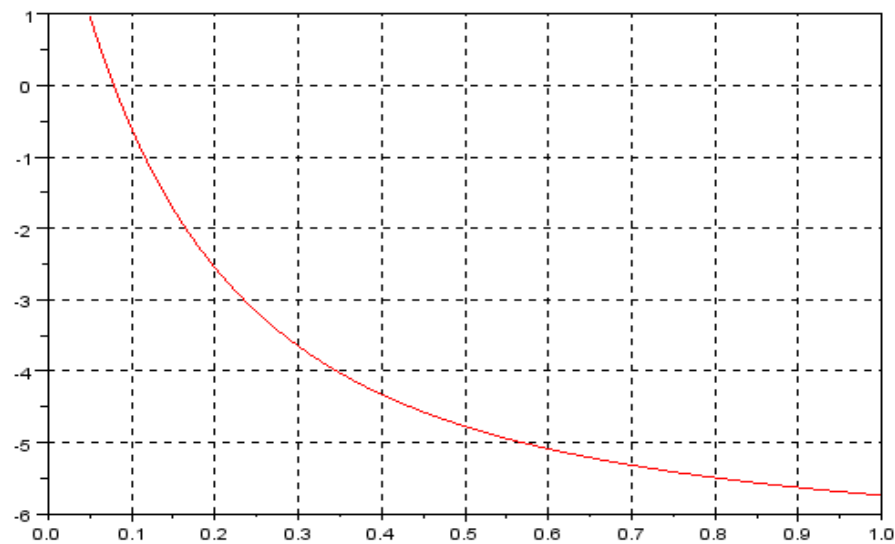


Figura 2 – Isolamento da Raiz para Cálculo da Taxa Juro da Função $f_2(j)$

Fonte: Autoria Própria (2012).

Com a localização do intervalo que contém a raiz, pode-se agora dar início ao processo de refinação da mesma. Os resultados são apresentados nas tabelas abaixo.

$$\text{Plano 1: } f_1(j) = \frac{1-(1+j)^{-6}}{j} - \frac{1.100-100}{224,58} = 0$$

Tabela 1 – Resultados da Taxa de Juros Encontrada para Plano 1 Utilizando os Métodos

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução (s)
Bisseccção	0,092494	15	-	0,78
Falsa Posição	0,092495	4	-	0,20
Ponto Fixo	0,224580	500	Sim	30,38
Newton	0,092494	3	-	0,14
Secante	0,092494	2	-	0,11

Fonte: Autoria Própria (2012).

$$\text{Plano 2: } f_2(j) = \frac{1-(1+j)^{-10}}{j} - \frac{1.100-0}{163,19} = 0$$

Tabela 2 – Resultados da Taxa de Juros Encontrada para Plano 2 Utilizando os Métodos

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução
Bisseccção	0,078995	14	-	0,70
Falsa Posição	0,078995	5	-	0,27
Ponto Fixo	0,148355	500	Sim	30,89
Newton	0,078995	2	-	0,09
Secante	0,078995	3	-	0,16

Fonte: Autoria Própria (2012).

A.1.4 Análise dos Resultados

Nas Tabelas 1 e 2 são expostos o valor da raiz encontradas para os planos 1 e 2 respectivamente. Esta raiz representa taxa de juros implantada em cada plano, com isso vemos que para o plano 1 a taxa de juros é aproximadamente 9,25% e para o plano 2 é 7,89%.

A.2 CABO SUSPENSO

A.2.1 Definição do Problema

Determinar o comprimento de um cabo suspenso entre dois pontos distantes 50 m que estão no mesmo nível e fazendo uma flecha de 2 m .

A.2.2 Modelagem Matemática

O comprimento L é dado pela equação

$$L = 2 \alpha \operatorname{senh} \frac{d}{2\alpha} \quad (5)$$

onde d é a distância entre os dois pontos e α é a raiz da equação

$$g(x) = x \left(\cosh \left(\frac{d}{2x} \right) - 1 \right) - f = 0, \quad (6)$$

sendo f a flecha.

A.2.3 Solução Numérica

Para encontrar o intervalo onde a raiz α está contida traçou-se o gráfico da função $g(x)$. Observando a figura 3 vemos que α está entre 140 e 160, com isso o intervalo a ser adotado é $[140, 160]$.

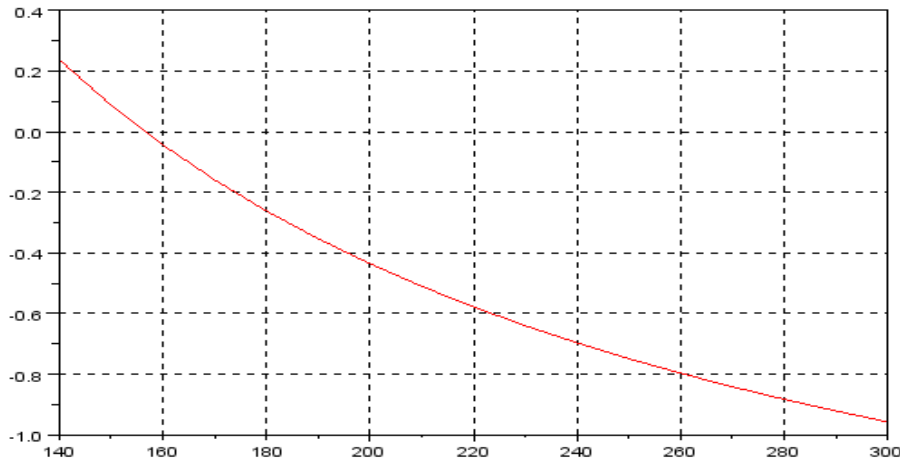


Figura 3 – Isolamento da Raiz

Fonte: Autoria Própria (2012).

Implementando os métodos numéricos abordados, na função $g(x)$ no intervalo determinado obtêm-se os dados apresentados na Tabela 13.

Tabela 3 – Resultados da Raiz α

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução
Bisseccão	156,582031	10	-	0,48
Falsa Posição	156,582644	4	-	0,28
Ponto Fixo	-	-	-	-
Newton	156,581704	2	-	0,13
Secante	156,582221	2	-	0,09

Fonte: Autoria Própria (2012).

Tomando $\alpha = 156,582031$, temos que o comprimento do cabo é

$$L = 2 \alpha \sinh \frac{d}{2\alpha} = 2 \times 156,582031 \times \sinh \left(\frac{50}{2 \times 156,582031} \right) \Rightarrow L = 50,21270 \text{ m. (7)}$$

A.2.4 Análise dos Resultados

O comprimento do cabo suspenso entre dois pontos no mesmo nível distantes 50 m e fazendo uma flecha de 2m é igual a 50,21 m.

A.3 TEMPERATURA

A.3.1 Definição do Problema

Em que temperatura a água tem capacidade calorífica igual a $10 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ sabendo que $300 \leq T \leq 1.500$?

A.3.2 Modelagem Matemática

A capacidade calorífica C_p ($\text{cal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) da água em função da temperatura $T(\text{K})$ é dada por:

$$C_p(T) = 7,219 + 2,374 \times 10^{-3} \times T + 2,67 \times 10^{-7} \times T^2; \quad (8)$$
$$300 \leq T \leq 1.500.$$

Para sabermos a que temperatura tem-se uma determinada capacidade calorífica c fazemos:

$$C_p(T) - c = 0. \quad (9)$$

A.3.3 Solução Numérica

A temperatura T será a raiz da equação 36 que iremos encontrar. Esboçando o gráfico da função $C_p(T)$ no intervalo proposto pelo problema vemos a presença da raiz.

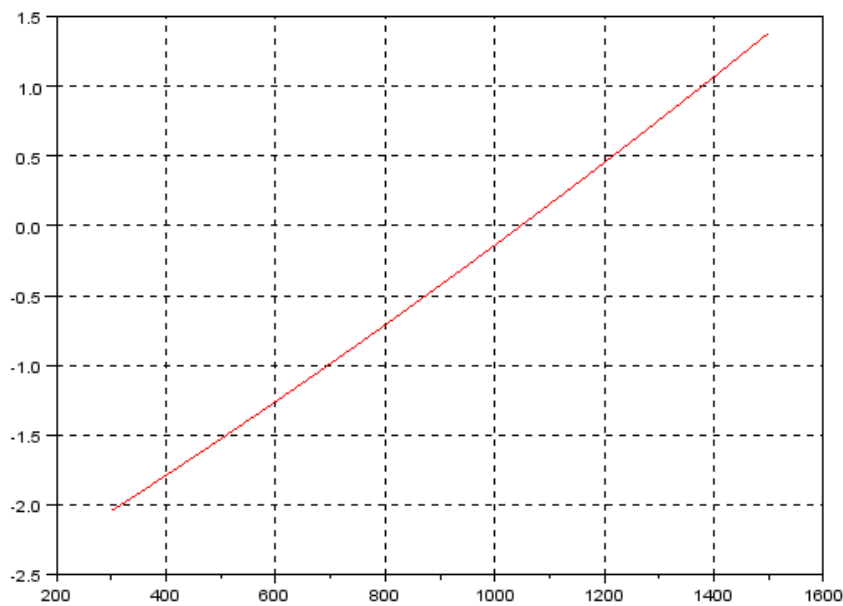


Figura 4 – Isolamento da Raiz

Fonte: Autoria Própria (2012).

Aplicando os métodos na equação 35 encontramos o valor mostrado na Tabela 14.

Tabela 4 – Resultados da Raiz

Método	Raiz	Números de Iterações	Erro	Tempo de Execução
Bisseção	1.047,930908	16	-	0,72
Falsa Posição	1.047,930151	4	-	0,19
Ponto Fixo	-	-	-	-
Newton	1.047,932489	2	-	0,09
Secante	1.047,932108	3	-	0,14

Fonte: Autoria Própria (2012).

A.3.4 Análise dos Resultados

A água com uma capacidade calorífica igual a $10 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ têm uma temperatura de 1.047,932108 K.