UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO - UFERSA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS, TECNOLÓGICAS
E HUMANAS - DCETH
CAMPUS ANGICOS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

CARLOS CLEOTON XAXÁ DA SILVA LIMA

ESTUDO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS QUE REALIZAM FATORAÇÃO LU NA MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.

ANGICOS-RN
2013

CARLOS CLEOTON XAXÁ DA SILVA LIMA

ESTUDO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS QUE REALIZAM FATORAÇÃO LU NA MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, Campus Angicos para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Profº. M.Sc. Matheus da Silva Menezes – UFERSA.

ANGICOS-RN
2013

Catalogação na Fonte

Biblioteca Universitária Campus Angicos (BCA-UFERSA)

L732c Lima, Carlos Cleoton Xaxa da Silva.

Estudo dos métodos numéricos que realizam fatoração LU na matriz dos coeficientes para resolução de sistemas de equações lineares / Carlos Cleoton Xaxa da Silva Lima. - Angicos: Ufersa, 2013.

45 f.; il.

Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Campus Angicos.

Orientador: Profo. M.Sc. Matheus da Silva Menezes

1. Sistemas de Equações Lineares. 2. Fatoração LU. 3. Doolitter. I. Título.

RN/UFERSA/BCA CDD 512.5

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária-Documentalista
Rebeka Mª de Carvalho Santos Godeiro – CRB 15/432

CARLOS CLEOTON XAXÁ DA SILVA LIMA

ESTUDO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS QUE REALIZAM FATORAÇÃO LU NA MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, Campus Angicos para a obtenção do título d e Bacharel em Ciência e Tecnologia.

APROVADA EM: 10 / 09 / 2013

BANCA EXAMINADORA

Mqmenezes

Profº. M.Sc. Matheus da Silva Menezes – UFERSA.

Presidente

Ivan Mezzomo

Profº. M.Sc. Ivan Mezzomo – UFERSA.

Primeiro Membro

Stefeson B.M.

Profº. M.Sc. Stefeson Bezerra de Melo – UFERSA

Segundo Membro

A **Robson Albino** [in memoria], meu amigo que foi o primeiro e uma das tão poucas pessoas a me ensetivar a pedir demissão do meu emprego para ir estudar em Angicos e segui com um dos meus sonhos. Por todos os ótimos conselhos dados e por ser a pessoa em que me ajudou no maior momento de decisão de minha vida. Por ter vindo fazer minha matricula comigo e ter me mostrado a cidade de Angicos, onde não conhecia nada.

A **Edione Xaxá da Silva**, minha mãe que sempre me apoiou em tudo, mesmo com todas as dificuldades nunca me deixou faltar nada. Por todos os conselhos e ensentivos, mesmo nos piores momentos em que pensei em desistir sempre esteve do meu lado não me deixando falhar.

A **Gardenia Martins**, minha amiga/irmã e companheira de todas as horas, que sempre ficou do meu lado, me incentivando a trilhas meus caminhos e concluir este curso.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, pela oportunidade e pelo privilégio que foi me dado em compartilhar tamanha experiência, ao frequentar este curso, perceber e atender para a importância de temas que não faziam parte do meu convívio.

Agradeço fortemente a minha mãe que sem ela nada disso seria possível, pela sua confiança, força de vontade e palavras de encorajamento, em toda minha vida desde o meu nascimento até a finalização do meu curso e não esquecendo os próximos desafios futuros. Não poderia deixar de citar todos da minha família desde irmão, irmã, Tias por toda a força e ajuda me dado.

A todos os meus amigos de Mossoró que diretamente e indiretamente sempre me deram forças para começar e continuar o meu curso. Incentivando-me a pedir demissão do meu emprego e seguir o um dos meus sonhos. Aqueles que desde o momento em que soube que passei ficaram ao meu lado. Dentre vários destaco alguns: Robson Albino, Rafaela Emmilli, Gardênia Martins, Hosana, Maria Vaneide, Paiva Junior, Amanda, Paulinha, Sergio, Sheila Kaliane e Keli Klineide e George por suas palavras que ficaram marcadas no dia da minha despedida ao passar pelas lojas de varejo onde trabalhei no centro de Mossoró.

A todos os meus colegas de curso pelo convívio fraternal e familiar, que nos momentos mais difíceis conseguimos superar as dificuldades e chegar até os nossos objetivos, entre eles destaco alguns: Bruna Ravana, Alexander Adler, Silinha Medeiros, Mayniere, Felipe Bastos, Paula Lima, Kátia Nascimento, Fidel Carlos, Thamara Targino, Aline Nascimento, Sinthya Gadelha, Cezar Ramos, Elys Eduarda, Alexandre Alencar, Nicanor Barroso e entre outros que não deu para citar aqui.

Agradeço a Naama Figueredo, Daphne Rodrigues e Diego Ramos pela amizade, companheirismo, força e ajuda na luta acadêmica do curso, onde sempre ficaram do meu lado nos mementos mais difíceis.

A Thais Russieley e Valciano Camilo agradeço por toda ajuda, onde com a colaboração do nosso grupo fizemos um artigo de calculo numérico do qual apresentamos no Congresso Nacional de Matemática Computacional – CMAC-NE 2012, contribuindo assim para a elaboração deste trabalho de conclusão de curso.

Ao meu orientador Matheus da Silva Menezes que mesmo com todas as dificuldades sempre acreditou e nos ajudou com o seu conhecimento a elaborar o artigo de onde posteriormente deu origem a estes TCC, e por ter confiado e acreditado que eu era capaz de desenvolver esse trabalho.

A todos os professores que passaram um pouco dos seus conhecimentos para mim, em especial: Ana Cristina, Antônio de Pádua, Ivan Mezzomo, Núbia Alves, Marcilene Vieira, Joselito Cavalcante, Matheus Menezes, Francisco Edcarlos Leite, Fabrícia Nascimento, Marcio Furukava, Gustavo Rebouças, Lucas Ambrósio e a todos que contribuíram direta ou indiretamente com o meu crescimento durante esse curso.

Obrigado a todos os meus familiares e amigos mesmo não estando citados aqui, que tanto contribuíram para o meu sucesso, agradeço muito por acreditarem nesta realização. Serei a todos infinitamente grato.

“A realização de um sonho depende da dedicação, há muita gente que espera que o sonho se realize por mágica, mas toda mágica é ilusão, e a ilusão não tira ninguém de onde está em verdade à ilusão é combustível dos perdedores, pois, quem quer faz alguma coisa encontra um meio. Quem não quer fazer nada, encontra uma desculpa.”

“Quando se tem sonho grande, a vida se expande. Sonhos grandes impulsionam, motivam, dão energia.”

“Sonhar é de graça, mas realiza-lo custa muito.”

Roberto Shinyashiki

RESUMO

O presente trabalho é referente à resolução de sistemas de equações lineares, por meio de métodos diretos que realizam uma decomposição da matriz A dos coeficientes do sistema de equação lineares. Será demonstrado o método da Fatoração LU tradicional para que possa ser feito uma comparação com o método de Doolittle e o método de Crout. São levantados aspectos básicos que possibilitarão uma compreensão mais completa sobre os métodos. Os três métodos estudados realizam uma decomposição sobre a matriz A do problema em um produto de duas matrizes triangulares, fáceis de serem resolvidas por substituições retroativas. Esta pesquisa contém as quatro fórmulas fundamentais para obtenção dos elementos das novas matrizes L e U, utilizadas nos métodos de Doolittle e de Crout, porém, não é realizada nenhuma demonstração matemática extensa. Ao final são apresentados alguns exemplos de aplicação numéricos sobre cada método, a fim de ilustrar didaticamente sua aplicação, onde ficou constatado a eficiência dos métodos para resolução dos problemas propostos, onde foi observado uma tendência de menor tempo de processamento dos métodos de Crout e Doolittle em relação ao LU tradicional.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares. Fatoração LU. Doolittle. Crout.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo BURIAN, LIMA e JUNIOR (2011) na ciência, muitos problemas podem ser modelados matematicamente em termos de sistemas de equações lineares. Para estes sistemas existem vários métodos de resolução já bastante utilizados, principalmente no que diz respeito a matrizes quadradas. Muitos exemplos podem ser citados sobre sua vasta aplicação prática em diversas áreas do conhecimento, alguns deles são: análise de vibrações, em um sistema mecânico; cálculo de estruturas, na construção civil; cálculo do ponto de equilíbrio de mercado, em economia; meteorologia, na previsão do tempo; otimização de sinais de transito e linhas do metrô; mecânica quântica; equilíbrio estático, nos nós de uma treliça; cálculo de estruturas de redes elétricas; solução de equações diferenciais; estudos quantitativos, nos problemas de administração; entre muitas outras aplicações na ciência e na engenharia.

Os sistemas de equações lineares estão associados a muitos problemas nos campos da engenharia e da ciência. Segundo LEON (1943), mais de 75% dos problemas matemáticos encontrados em aplicações cientificas e industriais envolvem a resolução de sistemas lineares em algum estágio.

Contudo, resolver sistemas de equações lineares de grande porte é uma tarefa árdua, onde os métodos iterativos se sobressaem em relação os métodos diretos. Segundo BURDEN e FAIRES (2008), para grandes sistemas esparsos, essas técnicas são eficientes em termos tanto de armazenamento no computador quanto de cálculos. A abordagem de fatoração da matriz dos coeficientes é uma abordagem que pode ser vantajosa em várias situações, com algumas vantagens de desempenho numérico.

1.1 JUSTIFICATIVA

A construção de um trabalho a respeito de métodos numéricos em Fatoração LU é de suma importância para várias áreas de atuação, pois existem inúmeros tipos de problemas que envolvem sistemas de equações lineares, assim como também existem um grande número de métodos de resolução desses sistemas, e cada método possui bons resultados para certo tipo de problema e não tão bons para outro tipo de problema.

Logo, aplicar o método que melhor se adapta a cada situação é de fundamental importância para que possamos ter um resultado rápido e confiável, possibilitando a análise da situação com uma base confiável.

1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho visa comparar e discutir acerca de métodos numéricos diretos que realizam uma decomposição da matriz A dos coeficientes para resolver sistemas de equações lineares. Os métodos vistos aqui realizam a decomposição da matriz A do problema em um produto de duas novas matrizes triangulares superior e inferior. O método da Fatoração LU tradicional utiliza os princípios básicos da Eliminação de Gauss para adquirir os elementos das matrizes L e U, enquanto os métodos Doolittle e Crout se utilizam de fórmulas para esses elementos (BURDEN, 2008).

Na prática, geralmente, tem-se que resolver sistemas de equações lineares de grande porte, que envolvem um grande de número de equações e variáveis representando dados de um problema, que pode surgir das diversas áreas distintas da ciência (BURDEN, 2008). Devem-se encontrar métodos numéricos que se apresentem mais vantajosos e eficazes na resolução desses problemas.

Serão analisados aspectos práticos, teóricos, exemplos de aplicação e algoritmo para cada método. De acordo com a problemática exposta acima, o trabalho que pretendemos desenvolver busca alcançar os seguintes objetivos:

1.2.1 Objetivo Geral

Efetuar um comparativo entre métodos numéricos que realizam fatoração LU na matriz dos coeficientes para resolução de sistemas de equações lineares, analisando a solução encontrada e o tempo de processamento.

1.2.2 Objetivos específicos

- ✓ Analisar os aspectos teóricos e práticos do método da Fatoração LU;
- ✓ Analisar a aplicação da fatoração LU através de sua formulação tradicional e das fórmulas de Doolittle e Crout;
- ✓ Analisar a aplicabilidade de cada método de acordo com as suas pré-condições;
- ✓ Implementar o algoritmo do método proposto na plataforma computacional numérica Scilab;

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho foi desenvolvido com base em uma pesquisa bibliográfica sobre a temática abordada, baseada em literaturas específicas da área, e na realização de testes numéricos dos métodos com auxílio computacional. A organização deste trabalho está com a seguinte formação metodológica:

- No capítulo 1, contém a organização metodológica, justificativos e objetivos de estudo;
- No capítulo 2, a fundamentação teórica matemática que dará suporte aos métodos estudados no qual serão usados para encontrar a solução do sistema de equações lineares pela fatoração LU, Doolittle e de Crout. Apresentaremos a fundamentação dos métodos diretos: Cramer, Retrosubstituição, Gauss, LU tradicional, Doolittle e Crout descrevendo o funcionamento de cada um deles;
- No capítulo 3, é demostrado um exemplo numérico de aplicação usando um modelo numérico computacional com o algoritmo de casa método e alguns problemas;
- No capítulo 4, contém uma comparação dos resultados obtidos com a aplicação computacional dos métodos LU Tradicional, Doolittle e Crout;
- No capítulo 5, serão apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2 FUDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 EQUAÇÃO LINEAR

Para um bom entendimento deste trabalho, o leitor deve está familiarizado com os conceitos básicos envolvendo matrizes e determinantes. Sugerimos para revisão desses conteúdos os trabalhos de LIPSCHUTZ, STRANG e LEON. Por este motivo, a revisão desses itens não faz parte do escopo do presente trabalho.

Uma equação linear na forma geral é representada pela seguinte equação,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

onde, a_1, a_2,..., a_n são chamados coeficientes, b é chamado de termo independente e x_1, x_2,..., x_n são as incógnitas ou variáveis.

Para LIPSCHUTZ (1977) equação linear é qualquer expressão formada pela soma do produto de uma constante por uma variável de primeiro grau. De acordo com FRANCO (2006, p. 118), *"uma equação é linear se cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparecer na primeira potência"*. Já para BARROSO (1987) uma equação é linear se cada termo contiver não mais que uma variável e cada variável aparecer na primeira potência.

Segundo LEON (2008), quase todos os problemas matemáticos, sejam eles industriais ou científicos, de alguma forma recaem na resolução de um sistema linear, por mais complexo que seja esse sistema. Usando alguns dos métodos podemos reduzir esse problema, e até torná-lo mais simples.

As soluções de sistemas de equações lineares são obtidas de forma mais simples, se comparadas os sistemas formados por equações não lineares, que são sistemas mais complexos. Se trabalharmos com sistemas de equações lineares devemos escolher o método que possua um melhor desempenho para o sistema em estudo, assim preservando a máxima precisão desejada na resolução do mesmo (FRANCO, 2006).

2.2 SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR

Um sistema de equações lineares é um conjunto de m equações lineares com n variáveis. Um sistema pode ser apresentado formalmente na seguinte configuração:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

Utilizando notação matricial, um sistema de equações lineares pode ser escrito na seguinte forma:

$$A_{m \times n} x_n = b_m \tag{3}$$

onde n = 1,2,3, ...,n e m = 1,2,3,...,m.

Onde A é uma matriz de ordem $m \times n$ que contém os coeficientes do sistema, x é o vetor das incógnitas que se pretende descobrir, e b corresponde ao vetor dos termos independentes. Formalmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

Um sistema linear também pode ser expresso na sua forma de matriz aumentada, ou seja, uma matriz que é formada pelos coeficientes mais a última coluna formada pelos termos independentes. Tomando o exemplo anterior de um sistema na forma geral pode-se expressa uma matriz aumentada em sua forma geral da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{5}$$

No presente trabalho, enfocamos apenas sistemas com a matriz A quadrada, ou seja, em que $n = m$.

2.3 CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

2.3.1 De acordo com a solução

De acordo com FRANCO (2006, p. 119), a classificação de um sistema linear é feita em função do número de soluções que ele admite.

- Sistema Possível: quando o sistema admite pelo menos um resultado. Se o sistema linear for possível pode ser:

    Determinado: o sistema possui uma única solução;

    Indeterminado: se o sistema admitir mais de uma solução;

- Sistema Impossível: é quando o sistema não permite soluções.

No caso em que o determinante $det(A) = 0$, o sistema é denominado singular e admite infinitas soluções ou é impossível. Se $det(A) \neq 0$, o sistema é dito não singular e tem solução possível e determinada.

2.3.2 De acordo com o tamanho

De acordo com GAVALA (2001), podemos classificar também um sistema de equações lineares pelo seu tamanho, analisando quantas equações lineares compõem o sistema estudado. Se o sistema for $m > 300$ temos um sistema grande e $m < 300$ um sistema pequeno, onde m é o número de equações que compõe o sistema.

2.4 TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES E MATRIZES EQUIVALENTES

É importante salientar as propriedades dos sistemas de equações lineares e das matrizes.

2.4.1 Transformações elementares

Teorema 2.1. *Seja S um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema ums sequência de operações elementares escolhidas entre:*

(i). Permutar duas das equações do sistema. Assim sendo o sistema obtido por essa operação possui a mesma solução do sistema original e vice-versa.

(ii). Multiplicar uma das equações do sistema por um número real diferente de zero. Assim o sistema obtido possui a mesma solução que o sistema original e vice versa.

(iii). Somar a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real.
obtemos um novo sistema S1, e os sistemas S e S1 são equivalentes.
Demostração: Ver em Ruggiero e Lopes (1996, p.121).

Denominam-se de transformações elementares as seguintes operações sobre as equações de um sistema linear (BARROSO, 1987):

a) Trocar a ordem de duas equações do sistema;
b) Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula;
c) Somar duas equações do mesmo sistema.

2.4.2 Determinantes

Definem-se as transformações elementares para matrizes de forma análoga ao feito com sistemas de equações lineares, e assim pode nos provar a equivalência entre duas matrizes A e B. Em outras palavras, quando uma matriz B é obtida a partir de A por transformações elementares nas linhas ou nas colunas, B é equivalente a A. Tem-se então que, se B é equivalente a A, $det(A) = det(B)$ (BARROSO, 1987).

2.4.3 Matriz triangular

Existem tipos de sistemas lineares que possuem solução que exige pouco esforço mecânico. Esses tipos de sistemas são encontrados quando a matriz dos coeficientes gerada pelo sistema é denominada uma matriz triangular.

Esta configuração de matriz é interessante para métodos que decompõem a matriz A. Uma matriz triangular é uma matriz quadrada em que todos os elementos de acima ou abaixo da diagonal principal são nulos. Se, são nulos os elementos abaixo da diagonal principal, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i > j$, a matriz é chamada triangular superior; se são nulos os elementos acima da diagonal, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i < j$, a matriz é chamada de triangular inferior (SPARANDIO, 2003). Assim tem como exemplo de matrizes triangulares superiores e inferiores (6) e (7) respectivamente.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Triangularizando a matriz A, resolve-la torna-se um processo muito simples. A vantagem desse formato vem do fato de que uma matriz triangular tem solução trivial (BURIAN, 2011). Temos então:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + \cdots + a_{(n-1)n}x_n = b_{m-1} \\ a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (8)$$

Percebe-se facilmente que a última equação do sistema tem solução direta da qual é obtida a resolução da equação (8). Portanto é extremamente vantajoso transformar uma matriz A em uma matriz triangular equivalente.

Sempre, na matriz triangularizada, ao se realizar a retrossubstituição o elemento da diagonal principal será colocado na posição da equação (8). Observe que os sistemas triangulares *determinados*, isto é, quando $a_{ii} \neq 0$; $i = 1, 2 \ldots, n$, indicam que o sistema é singular e possui solução única, ou seja, $det(A) \neq 0$. Entretanto, poderia haver algum elemento nulo, na diagonal principal e, neste caso, o sistema possuiria mais que uma ou nenhuma solução. Sendo assim, não deve haver o número zero na diagonal principal da matriz triangularizada adquirida, isso é indicativo de que o sistema não tem solução.

2.5 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÕES

Os métodos numéricos para resolução de sistemas de equações lineares podem ser classificados, diretos e iterativos.

2.5.1 Métodos diretos

Os métodos diretos, podem ser definido como sendo métodos cuja solução do sistema, se existir e for única, é obtida através de um número finito de passos pré-determinados Sperandio *et al.*(2003, p. 68).

Estes métodos determinam a solução exata do sistema, sendo somente necessário que a matriz seja quadrada e não singular ($det \neq 0$).

Podemos observar a precisão do resultado encontrado em relação à solução exata através do (resíduo). O cálculo para o resíduo, r, é realizado através da seguinte fórmula (BARROSO, 1987):

$$r = b - Ax \quad (9)$$

Onde x é o vetor solução do sistema.

O custo computacional, em termos de processamento, num método direto pode ser estimado por meio do número de operações que ele envolve. Os métodos diretos geralmente são usados para resolver sistemas de equações lineares densos (ou seja, que possuem poucos elementos nulos) de pequeno porte devido ao fato de que sistemas maiores acarretam erros maiores de arredondamento. Vale lembrar que os métodos diretos não são uma boa opção para resolver sistemas esparsos, ou seja, sistemas cuja matriz apresenta uma quantidade significativa de elementos nulos (FÉ, 2011).

2.5.2 Métodos Iterativos

São aqueles que geram uma sequência de vetores $x^{\{k\}}$, a partir de uma solução inicial $x^{\{0\}}$ e sob certas condições esta sequência converge para a solução $x^{\{*\}}$ caso ela exista.

Segundo SPERANDIO *et al.*(2003, p. 68), é importante a observação de dois aspectos básicos na escolha de um método numérico, que são. A propagação dos erros de arredondamento e sua acumulação, o armazenamento da matriz dos coeficientes está de acordo com a sua estrutura. Como os métodos do presente trabalho são diretos, iremos enfocar apenas esta estratégia.

2.6 MÉTODOS DIRETOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Um dos grupos de métodos de resoluções de sistemas lineares é denominado de métodos diretos ou exatos. Segundo FRANCO (2006, p. 122), a estratégia para a resolução de métodos diretos é transformar o sistema triangular, sendo que uma matriz gerada por um sistema triangular possui uma fácil solução.

Os métodos diretos são aqueles que possuem um número finito de passos. Conforme SPERANDIO *et al.*(2003, p. 68), "*Diz-se que um método é direto quando, na ausência de erros de arredondamento, determina a solução exata do sistema por meio de um número finito de passos previamente conhecidos.*", já para FRANCO (2006, p. 122) métodos diretos, "*são aqueles que forneceriam a solução exata, não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações.*".

De acordo com FRANCO (2006, p. 121), esses métodos são indicados para problemas envolvendo sistemas lineares de pequeno ou médio porte, pelo fato desse tipo de método gerar erros de arredondamento que são acumulados em seus passos, que se aplicado em sistemas de grande porte, podem gerar soluções diferentes das reais, acarretando erros graves. Por esse motivo, todos os conceitos sobre esse método trabalham na ausência dos erros de arredondamento.

A seguir será apresentado a ideia básica de métodos numéricos mais comuns determinados diretos ou exatos, tendo em vista que trabalhamos com sistemas que possui solução possível deste que a matriz *A* seja uma matriz não singular, ou seja, $det\ A \neq 0$.

2.6.1 Regra de Cramer

Segundo SPERANDIO *et al.*(2003, p. 68) a regra de *Cramer* é um método classificado como direto ou exato, que consiste em encontrar os valores das incógnitas x_i, onde $i = 1,2, ..., n$, pela equação:

$$x_i = \frac{\det D_i}{\det A} \tag{10}$$

Onde *det A* é o determinante da matriz dos coeficientes e $detD_i$ é o determinante da matriz dos coeficientes tendo a coluna *i* substituída pela matriz coluna formada pelos termos independentes ou constantes do sistema.

Esse método é considerado lento pelo fato de gerar um grande número de operações para a resolução do sistema linear. De acordo com SPERANDIO *et al.*(2003, p. 68), é um método que possui um número de operações de ordem *n*!, possuindo apenas aplicação para sistemas com poucas equações e incógnitas.

2.6.2 Método da Retrosubstituição

Esse é um método numérico aplicado apenas em sistemas lineares classificados como triangulares, que para BURIAN (2011, p. 39), sistemas desse tipo possuem solução trivial, tomando como exemplo um sistema triangular superior. Em sua forma geral, temos:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
0x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
0x_1 & + & 0x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_n \\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\
0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{cases} \tag{11}
$$

Assim analisando a última equação podemos notar que o valor da incógnita x_n e dada por:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \tag{12}$$

Já com o valor da incógnita x_n obtido da equação (12), é possível montar uma relação matemática para a incógnita $x_n - 1$, em função do termo independente e da incógnita x_n utilizando a penúltima equação do sistema. Assim:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1,n)}x_n}{a_{(n-1),(n-1)}} \tag{13}$$

Como feito anteriormente é possível aplicar essas equações até termos:

$$x_1 = \frac{b_n - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \tag{14}$$

Gerando uma equação em sua forma geral dado por:

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \tag{15}$$

onde i = 1,2,...,n e j = 1,2,..., n.

Após esses passos encontramos a solução do sistema linear podendo notar que é um método simples que se restringe a casos de sistemas triangulares. Dessa forma, BURIAN (2011, p. 40) afirma que o melhor caminho para a resolução de um sistema linear é transformá-lo em um sistema triangular.

2.6.3 Método da eliminação de Gauss

Segundo SPERANDIO *et al.*(2003, p. 68), o método de eliminação de Gauss é determinado como um método direto ou exato cujo objetivo é transformar um sistema em estudo em um sistema triangular superior equivalente por meio de relações fundamentais torna-se um sistema de fácil resolução FRANCO (2006, p. 122).

Este método trabalha com a matriz aumentada conforme (5).

De acordo com Ruggiero e Lopes (1996) essa operação é possível baseando-se teorema (2.1) visto anteriormente.

Segundo FREITAS (2000, p. 93), o método divide-se em duas partes, transformando o sistema em um sistema triangular por meio de eliminação sistemática das incógnitas, e em seguida aplicando o processo de retrosubstituição.

De acordo com RUGGIERO *et al.*(1996, p. 122), na primeira fase, o método de Gauss realiza a transformação do sistema em um sistema triangular encontrado o pivô (p_K), onde:

$$p_K = a_{KK} \tag{16}$$

onde, k = 1,2,3, ..., n.

Em seguida, é preciso encontrar um termo, denominado de multiplicador de linhas, na fase j é a coluna demostrado por m_{kj}, que é dado por:

$$m_{kj} = \frac{a_{ik}}{p_{kk}} \tag{17}$$

sendo i > k.

Tendo encontrado esses dois valores é realizado a atualização das linhas abaixo da linha do pivô (L_p), utilizando a seguinte expressão para RUGGIERO *et al.*(1996, p. 122):

$$L_i \leftarrow L_i - mL_i . L_{piv\hat{o}} \tag{18}$$

Onde i é a linha que está sendo modificada.

Com a aplicação desse método obtêmos um sistema triangular superior equivalente. Com isso pode-se aplicar a segunda fase do método, que nada mais é que o método de retrosubstituição, encontrando assim a solução do sistema estudado.

2.6.4 Fatoração LU Tradicional

O método de fatoração LU é classificado como um método de fatoração, que para RUGGIERO *et al.*(1996, p. 132), consiste em decompor uma matriz A de um sistema linear, no produto de dois ou mais fatores, sendo que a resolução dos sistemas lineares formados por esses fatores geram a solução do sistema linear. A fatoração LU é um processo de fatoração mais empregado.

Nesta fatoração, a matriz L é triangular inferior com diagonal principal unitária e a matriz U é triangular superior. O método da Fatoração LU tradicional utiliza-se do método da Eliminação de Gauss, através do qual se obtém os elementos de L, composta pelos multiplicadores, e U, composta pelos elementos restantes da eliminação. Este processo de decomposição em L e U é um dos mais empregados porque apresenta mais facilidade caso seja necessário o uso de estratégias de pivoteamento (RUGGIERO, 1996).

Neste método, L e U terão a seguinte configuração:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{19}$$

onde, m_{ij} são os multiplicadores e a_{ij} são os elementos obtidos no processo a partir de A.

Para calcular, inicialmente chamamos de pivô o elemento da diagonal principal da coluna que se pretende encontrar o multiplicador.

$$piv\hat{o} = a_{kk}\ ;\ k = 1, \dots, n \tag{20}$$

Seguindo, calculamos o multiplicador que irá ocupar a matriz L.

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \tag{21}$$

Conhecendo estes dois componentes, os elementos para cada posição da matriz U podem ser atualizados pela seguinte fórmula, na qual $L_{piv\hat{o}}$ é o elemento da linha do pivô, na coluna da posição que será atualizada:

$$L_i \leftarrow L_i - mL_i . L_{piv\hat{o}} \tag{22}$$

Vale lembrar que o multiplicador é encontrado apenas para $i > j$. Para se calcular o multiplicador de uma posição, não é necessário aplicar a equação (22) para esta posição. Deve-se aplicá-la apenas para as colunas seguintes.

2.6.4.1 Decomposição da matriz A

O processo de fatoração para sistemas de equações lineares, dado por (2), consiste em decompor a matriz A dos coeficientes em um produto de dois ou mais fatores, e em seguida, resolver uma sequência de sistemas triangulares que conduzirão à solução geral do sistema (RUGGIERO, 1996).

Há inúmeras situações nas quais é mais adequado resolver os sistemas lineares utilizando técnicas de fatoração da matriz A. Em diversas situações, os vetores constantes não são conhecidos desde o início, por exemplo, ao se resolver $Ax_1 = b_1$ e $Ax_2 = b_2$, onde b_2 é alguma função de x_1 (SPERANDIO, 2003).

Outra vantagem que pode ser ressaltada é a seguinte: uma vez que a matriz A está decomposta, podemos encontrar diferentes vetores solução x do sistema $Ax = b$ para diferentes valores de b com grande facilidade. Para cada solução adicional, realizariamos as etapas de retrossubstituições que, como já visto, são processos relativamente simples.

Os três métodos demonstrados na pesquisa utilizam decomposição.

Em vista de tudo que já foi dito e conceituado, pode ser feito a seguinte fundamentação teórica que permite demonstrar formalmente a decomposição da matriz A em um produto entre duas matrizes triangulares L (inferior) e U (superior).

O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para a existência de L e U.

Teorema 2.2 *Sejam A uma matriz $n \times n$ e A_k a matriz $k \times k$ formada pela interseção das primeiras k linhas e colunas em A. Se $det(A_k) \neq 0$, $k = 1,2,\dots,n-1$, então existe uma única matriz triangular $L = \left[m_{ij}\right]_{n\times n}$, com $m_{ii} = 1, i = 1,2,\dots,n$ e uma única matriz triangular superior $U = \left[u_{ij}\right]_{n\times n}$, tal que $LU = A$.*

Demonstração: ver em Franco (2006)

Se:

$$A = LU \tag{23}$$

Então a equação (3) equivale a:

$$LUx = b \tag{24}$$

Fazemos $Ux = y$ e decompomos em dois sistemas triangulares:

$$Ly = b \tag{25}$$

$$Ux = y \tag{26}$$

Finalmente, os dois sistemas obtidos são de resolução imediata, como visto anteriormente, e devem ser resolvidos respectivamente para obtermos a solução do sistema.

Os elementos das matrizes L e U podem ser obtidos através de fórmulas para os elementos l_{ij} e u_{ij}, ou por eliminação utilizando-se a ideia simples que vem do *Método da Eliminação de Gauss*.

2.6.4.2 Método de decomposição Doolittle e Crout

Inicialmente, estes métodos demonstram ser mais práticos na obtenção dos elementos de L e U, pois são calculados de forma direta, através de fórmulas simples de serem aplicadas, sem longas demonstrações matemáticas temos, a partir que da equação matricial (6) (SPERANDIO, 2003):

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{r} m_{ip}u_{pj}\,, r = mín(i, j) \tag{27}$$

Para o passo k, podemos escrever:

$$a_{kj} = \sum_{p=1}^{k} m_{kp}u_{pj}\,; j \geq k \tag{28}$$

$$a_{ik} = \sum_{p=1}^{k} m_{ip}u_{pk}\,; i > k \tag{29}$$

2.6.4.3 Método de Doolittle

No método de Doolittle, L é uma matriz triangular inferior unitária, $m_{kk} = 1$. Lembramos que o vetor constante b não é inserido na fórmula a seguir. Porém, é preciso ter cuidado para não se esquecer de utilizá-lo caso seja aplicado alguma *estratégia de pivoteamento*.

Então para o passo k e $m_{kk} = 1$; $k = 1, 2, \ldots, n$, combinamos as equações (28) e (29), e os elementos das matrizes U e L podem ser obtidos, respectivamente, por (RUGGIERO, 1996):

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{kp} u_{pj}\,; j = k, k+1, \dots, n \tag{30}$$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{ip} u_{pk}}{u_{kk}}; i = k+1, k+2, \dots, n \tag{31}$$

2.6.4.4 Método de Crout

O método de Crout é praticamente semelhante ao de Doolittle e sua determinação advém do mesmo princípio. Basta fazer $u_{kk} = 1$; $k = 1, 2, \dots, n$. Neste método, U é uma matriz triangular superior unitária. As fórmulas que permitem calcular os elementos de L e U são, respectivamente (RUGGIERO, 1996):

$$m_{ik} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{ip} u_{pk}\,; i = k, k+1, \dots, n \tag{32}$$

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{kp} u_{pj}}{m_{kk}}; j = k+1, k+2, \dots, n \tag{33}$$

2.7 ESTRATÉGIAS DE PIVOTEAMENTO

Os três métodos de resolução para sistemas de equações lineares estudados possuem restrições contidas em suas fórmulas, relacionadas aos elementos da diagonal principal (BARROSO, 1987). Para o método da Fatoração LU tradicional, o elemento pivô de equação (33) é necessário para calcular o multiplicador de equação (20), exigindo que $a_{kk} \neq 0$, devido ao fato de não poder ocorrer uma divisão por zero; sendo impossível prosseguir com as etapas do método (FÉ, 2011). De maneira análoga para os métodos de Doolittle e de Crout, respectivamente, é preciso que o elemento $u_{kk} \neq 0$, na equação (31) e o elemento $m_{kk} \neq 0$, na equação (33) para que os métodos possam prosseguir.

Para contornar estes problemas, devemos aplicar uma estratégia de pivoteamento.

Tendo em mente as propriedades dos sistemas de equações lineares e das matrizes, procedemos trocando linhas e/ou colunas trazendo outro elemento para ser pivô. Para SPERANDIO (2003), essas estratégias são indicadas não somente quando o pivô é nulo, mas também quando ele é próximo de zero. Em qualquer calculadora ou computador os cálculos são efetuados com aritmética de precisão finita, e pivôs próximos de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade que, por sua vez, originam uma ampliação dos erros de arredondamento. É importante saber que estas estratégias aceleram os cálculos e asseguram a estabilidade numérica dos métodos.

Intuitivamente podemos dizer que o erro de arredondamento é minimizado quando o elemento pivô é o maior possível, em módulo. Com base na teoria de erros, podemos mostrar que o erro de arredondamento diminui quando a estratégia de pivotação é usada.

São duas as estratégias de pivoteamento:

i. **Pivoteamento parcial:** nesse caso o elemento pivô deve ser escolhido da seguinte forma: determinamos o máximo do conjunto $\left\{\left|a_{ik}^{(k)}\right|, k \leq i \leq n\right\}$ e tomamos $a_{kk}^{(k)} = a_{rk}$, sendo r a linha em que se encontra o elemento máximo em valor absoluto.

ii. **Pivoteamento completa:** o elemento pivô deve ser escolhido da seguinte forma: determinamos o elemento máximo do conjunto $\left\{\left|a_{ik}^{(k)}\right|, k \leq i \leq n, j \leq n\right\}$ e tomamos $a_{kk}^{(k)} = a_{rs}^{(k)}$, sendo r e s a linha e a coluna, respectivamente, onde se encontra o elemento máximo em valor absoluto.

Na prática, os dados do problema que compõem a equação (2), são quantidades físicas e podem possuir ordens de grandeza distintas. Isso indica que pode haver propagação de erros de arredondamento durante a resolução. Técnicas de escalonamento descritas em (24) podem ser utilizadas para que esses elementos fiquem uniformes.

3 EXEMPLO NUMÉRICO DE APLICAÇÃO, ALGORITMO E PROBLEMAS

Neste capítulo apresentamos inicialmente a aplicação analítica dos métodos em um pequeno exemplo, a fim de ilustrar didaticamente o processo.

Em seguida apresentamos os algoritmos que foram utilizados para o experimento computacional.

Por fim, apresentaremos os problemas e suas principais características, o experimento numérico ocorreu pela aplicação dos algoritmos propostos na resolução dos problemas, onde analisamos a solução encontrada e o tempo de processamento.

3.1 EXEMPLO NUMÉRICO DE APLICAÇÃO

Como o presente trabalho enfoca uma comparação do método LU tradicional ao método de Doolittle e Crout, demostraramos apenas exemplo destes métodos. Como exemplo de aplicação, para cada método consideremos o mesmo sistema de equações lineares a seguir:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{34}$$

A matriz A e o vetor b para este sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} 20 \\ 51 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

3.1.1 LU Tradicional

Toma-se $k = 1$ para indicar operações realizadas na primeira coluna em relação ao pivô e ao multiplicador. Identifica-se o elemento pivô através da equação (20):

$$piv\hat{o} = a_{11} = 3$$

Definemos os multiplicadores, m_{ij}, pela equação (21), referentes à linha, lembrando que eles são calculados a partir de $i = 2$:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-5}{3}$$

Então, aplica-se (22) para as colunas seguintes a cada multiplicador. Não é necessário aplicá-la para a posição do próprio multiplicador:

$$L_{22} = L_{22} - m_{21} \times L_{piv\hat{o}} = -9 - (2 \times -2) = -5$$

$$L_{23} = L_{23} - m_{21} \times L_{piv\hat{o}} = 12 - (2 \times 5) = 2$$

$$L_{32} = L_{32} - m_{31} \times L_{piv\hat{o}} = 0 - \left(\frac{-5}{3} \times -2\right) = \frac{-10}{3}$$
$$L_{33} = L_{33} - m_{31} \times L_{piv\hat{o}} = 2 - \left(\frac{-5}{3} \times 5\right) = \frac{31}{3}$$

Obtivemos a seguinte matriz equivalente:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 2 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-10}{3} & \frac{31}{3} \end{bmatrix}$$

Tomamos $k = 2$, partindo agora para a segunda coluna. Identificamos novamente o pivô e calculamos o multiplicador, como feito anteriormente, porém, com os novos valores encontrados:

$$piv\hat{o} = a_{22} = -5$$
$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{\frac{-10}{3}}{-5} = \frac{2}{3}$$

Procedemos, de maneira análoga, para atualizar a linha:

$$L_{33} = L_{33} - m_{32} \times L_{piv\hat{o}} = \frac{31}{3} - \left(\frac{2}{3} \times 2\right) = 9$$

Observa-se que as equações são aplicadas sobre uma linha, com número de vezes igual à quantidade de multiplicadores que ela contém, e somente para as colunas subsequentes ao multiplicador.

De acordo com (19), as matrizes L e U, com seus respectivos elementos são:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Usando (25), temos:

$$\begin{cases} y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 20 \\ 2y_1 + y_2 + 0y_3 = 51 \\ \frac{-5}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

O vetor y é:

$$y = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Por último usamos a equação (26):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 0x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 0x_2 + 9x_3 = 27 \end{cases}$$

O vetor solução x é:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Doolittle

Aplicando as equações (30) e (31) para $k = 1$, teremos $j = 1, 2, 3$ e $i = 2, 3$. Inicia-se determinando u_{ij} e os resultados são usados no cálculo de m_{ij}. Então:

$$u_{11} = a_{11} = 3$$
$$u_{12} = a_{12} = -2$$
$$u_{13} = a_{13} = 5$$
$$m_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{6}{3} = 2$$
$$m_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{-5}{3}$$

No passo seguinte, $k = 2$; $j = 2, 3$ e $i = 3$:

$$u_{22} = a_{22} - (m_{21}u_{12}) = -9 - \big(2 \times (-2)\big) = -5$$
$$u_{23} = a_{23} - (m_{21}u_{13}) = 12 - (2 \times 5) = 2$$
$$m_{32} = \frac{a_{32} - (m_{31}u_{12})}{u_{22}} = \frac{0 - \left(\frac{-5}{3} \times (-2)\right)}{-5} = \frac{2}{3}$$

Finalmente para $k = j = 3 = n$, temos:

$$u_{33} = a_{33} - (m_{31}u_{13}) - (m_{32}u_{23}) = 2 - \left(\frac{-5}{3} \times 5\right) - \left(\frac{2}{3} \times 2\right) = 9.$$

Obtivemos todos os elementos de L e U, (19):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Das matrizes L e U extraímos e resolvemos os sistemas triangulares, conforme foi demonstrado anteriormente.

Usamos a equação (25):

$$\begin{cases} y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 20 \\ 2y_1 + y_2 + 0y_3 = 51 \\ \frac{-5}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Resolve-se o sistema e se obtém o vetor y:

$$y = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Por fim, usando a equação (26), temos:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 0x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 0x_2 + 9x_3 = 27 \end{cases}$$

O vetor solução x é:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.1.3 Crout

Aplicando as equações (32) e (33), para $k = 1;\ i = 1, 2, 3;\ j = 2,3$:

$$m_{11} = a_{11} = 3$$
$$m_{21} = a_{21} = 6$$
$$m_{31} = a_{31} = -5$$
$$u_{12} = \frac{a_{12}}{m_{11}} = \frac{-2}{3}$$
$$u_{13} = \frac{a_{13}}{m_{11}} = \frac{5}{3}$$

Para $k = 2;\ i = 2,3;\ j = 3$:

$$m_{22} = a_{22} - (m_{21}u_{12}) = -9 - \left(6 \times \left(\frac{-2}{3}\right)\right) = -5$$

$$m_{32} = a_{32} - (m_{31}u_{12}) = 0 - \left((-5) \times \left(\frac{-2}{3}\right)\right) = \frac{-10}{3}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - (m_{21}u_{13})}{m_{22}} = \frac{12 - \left(6 \times \frac{5}{3}\right)}{-5} = \frac{-2}{5}$$

No último passo $k = i = 3 = n$:

$$m_{33} = a_{33} - (m_{31}u_{13}) - (m_{32}u_{23}) = 2 - \left((-5) \times \left(\frac{5}{3}\right)\right) - \left(\left(\frac{-10}{3}\right) \times \frac{2}{-5}\right) = 9$$

Portanto, os elementos de L e U são:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ -5 & -\frac{10}{3} & 9 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizamos (25):

$$\begin{cases} 3y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 20 \\ 6y_1 - 5y_2 + 0y_3 = 51 \\ -5y_1 - \frac{10}{3}y_2 + 9y_3 = 1 \end{cases}$$

O vetor y é:

$$y = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{-11}{5} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Por fim, usamos a equação (26), temos:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{20}{3} \\ 0x_1 + x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{-11}{5} \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

O vetor solução x é:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.2 ALGORITMOS

Para a realização dos testes numéricos foi realizado a implementação do algoritmo para a resolução dos métodos diretos: LU tradicional, Doolittle e Crout. Dessa forma os algoritmos utilizados nos testes são mostrados de forma simplificada pelas tabelas a seguir.

Tabela 1: Algoritmo utilizado para o método de Fatoração LU.

Algoritmo: Método de Fatoração LU Tradicional

VARIAVEIS
 	
$n = 0$;
$A = []$;
$b = []$;
$L = eye(n\ ,n)$;
[nr,nc]=size(A);
L=zeros(nr,nr);
P=eye(nr,nr);
u=A;
b1=b;
i, j, k: contadores
AUX: acumulador
 	
INICIO
 	
Função de x ← retrosubstituição (Ab,nr,nc)
X(nr) ← Ab (nr,nc + 1) / Ab (nr,nc);
 	
Para i de nr - 1 até 1 faça
AUX1=0;
 	
Para j de i + 1 até nc faça
AUX ← AUX + Ab (i,j) × x(j);
Fimpara
 	
x(i) ← (Ab(i,nc + 1) – AUX) / Ab(i,i);
Fimpara
 	
Fim de função
 	
Para j de 1 até $nr - 1$ faça
Se (u(j,j) = 0) então
[u,b1,L] ← pivoteamentoLu(u,b1,L,j,nr);
Fimpara
 	
Pivô ← u(j,j);

```
    Para i de j + 1 até nr faça
       Mult   ←   u(i,i) / pivô;
       u(i,:)   ←   u(i, :) – mult  ×  u(j,:);
       L(i,j)   ←   mult;
    Fimpara

Fimpara
         Para i de 1 até nr faça
              L(i,i)   ←   1;

        Fimpara


FIMALGORITMO
```

Tabela 2: Algoritmo utilizado para o método de Doolittle.

Algoritmo: Método de Doolittle
 	
<u>VARIAVEIS</u>
 	
$n = 0$;
$A = []$;
b = [];
[n,c]=size(A);
L=eye(n,n);
u=zeros(n,n);
i, j, k, p: contadores
$AUX1, AUX2$: acumuladores
 	
<u>INICIO</u>
 	
Para k de 1 até n faça
    $L(k,k) \leftarrow 1$;
 	
        Para j de k até n faça
        $AUX1 = 0$;
 	
                Para p de 1 até $k-1$ faça
                $AUX1 \leftarrow L(k,p) \times u(p,j) + AUX1$;
                Fimpara
 	
        $u(k,j) \leftarrow A(k,j) - AUX1$;
        $AUX1 = 0$;
        Fimpara
 	
          Para i de $k+1$ até n faça
          $AUX2 = 0$;
 	
                  Para p de 1 até $k-1$ faça
                  $AUX2 \leftarrow L(i,p) \times u(p,k) + AUX2$;
                  Fimpara
 	
            $L(i,k) \leftarrow (A(i,k) - AUX2)/u\,(k,k)$;
            $AUX2 = 0$;
            Fimpara
 	
Fimpara
 	
<u>FIMALGORITMO</u>

Tabela 3: Algoritmo utilizado para o método de Crout

```
Algoritmo: Método de Crout

VARIAVEIS

n = 0;
A = [];
u = [];
b = [];
[n,c]=size(A);
L=eye(n,n);
u=zeros(n,n);
i, j, k, p: contadores
AUX1, AUX2: acumuladores

INICIO

Para k de 1 até n faça
u(k,k) ← 1;

    Para i de k até n faça
    AUX1 = 0;

        Para p de 1 até k − 1 faça
        AUX1 ← L(i,p) × u(p,k) + AUX1;
        Fimpara

    L(i,k) ← A(i,k) − AUX1;
    AUX1 = 0;
    Fimpara

    Para j de k + 1 até n faça
    AUX2 = 0;

        Para p de 1 até k − 1 faça
        AUX2 ← L(k,p) × u(p,j) + AUX2;
        Fimpara

    u(k,j) ← (A(k,j) − AUX2)/L (k,k);
    AUX2 = 0;
    Fimpara

Fimpara

FIMALGORITMO
```

3.3 PROBLEMAS

Para a realização dos testes foi escolhido de 3 (três) problemas, onde um problema nada mais é que matrizes formadas por termos de um sistema linear, mais um vetor *b* que é o vetor formado pelos termos independentes do sistema linear. Todos os métodos aqui usados tem como objetivo encontrar um vetor solução de um sistema linear com a seguinte representação $Ax = b$, onde A é uma matriz quadrada de ordem n, x e b são matrizes de ordem $n\text{-}1$.

Cada problema tem o tamanho diferente, porém todas as matrizes são quadradas, foram selecionadas matrizes com 3(três), 4(quatro) e 5(cinco) colunas e linhas.

O enfoque principal dos testes foi para métodos diretos, que realizam uma decomposição sobre A matriz do problema em um produto de duas matrizes triangulares, foram testados nesse trabalho os métodos de LU tradicional, Doolittle e Crout. A seguir segue, informações do computador e sistema utilizado nos testes.

Tabela 4: Dados referentes ao computador utilizado nos testes

Características Gerais	
Fabricante	Itautec
Modelo	InfoWay ST 4270
Processador	Intel® Core™ i5 CPU 750 @ 2.67GHz 2.66GHz
Memória RAN	4GB
HD	300GB

Fonte: Manual do fabricante (2013)

Tabela 5: Dados referentes ao sistema operacional utilizado nos testes

Características Gerais	
Fabricante	Microso ft
Modelo	Windows 7 Profissional 32 Bits

Fonte: Manual do fabricante (2013)

O software utilizado para a resolução dos problemas foi o Scilab, que é um software livre para computação numérica, que é encontrado para downloads no site do desenvolvedor pelo endereço http://www.scilab.org/, onde é encontrada também todas as informações do software, manuais e características das versões. Para a implementação desse trabalho foi utilizado o software Scilab da versão 5.3.0, para Windows 32 bits.

3.3.1 Problema I M3x3

O problema M3x3 foi retirado do exemplo de aplicação numérica, sendo utilizada a equação (35), a matriz A é uma matriz quadrada três por três. Aplicamos os métodos diretos de fatoração LU tradicional, Doolittle e Crout e com isso obtivemos os seguintes resultados demostrados na tabela 6:

Tabela 6: Problema I m3x3 comparativo entre os métodos

Matriz	$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	Vetor	$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 51 \\ 1 \end{bmatrix}$
Matriz	L U Tradicional	DOOLITTLE	CROUT
	$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1.6666667 & 0.6666667 & 1 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1.6666667 & 0.6666667 & 1 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ -5 & -3.3333333 & 9 \end{bmatrix}$
	$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$	$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$	$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Solucao do Sistema Ly=b	$Y = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} 6.6666667 \\ -2.2 \\ 3 \end{bmatrix}$
Solucao do Sistema Ux=y	$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
Tempo de Execucção	0.142 s	0.073 s	0.02 s

Fonte: Autoria própria (2013)

3.3.2 Problema II M4x4

O problema M4x4 é de autoria própria. Da mesma forma que aplicamos no problema anterior será usado neste, utilizando a matriz A quadrada quatro por quatro, e com isso obtivemos os seguintes resultados mostrados na tabela 7:

Tabela 7: Problema II m4X4 comparativo entre os métodos

Matriz	$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 7 & 2 \\ -4 & -1 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	Vetor	$b = \begin{bmatrix} -11 \\ -30 \\ -40 \\ -110 \end{bmatrix}$
Matriz	L U Tradicional	DOOLITTLE	CROUT
	$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 \\ 2.5 & -1 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 \\ 2.5 & -1 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -20 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 7.85 \end{bmatrix}$
	$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3.5 \\ 0 & 0 & -20 & -21.5 \\ 0 & 0 & 0 & 7.85 \end{bmatrix}$	$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3.5 \\ 0 & 0 & -20 & -21.5 \\ 0 & 0 & 0 & 7.85 \end{bmatrix}$	$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 4 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Solucao do Sistema Ly=b	$Y = \begin{bmatrix} -11 \\ -13.5 \\ 32.5 \\ -92.75 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} -11 \\ -13.5 \\ 32.5 \\ -92.75 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} -5.5 \\ -13.5 \\ -1.625 \\ -11.815287 \end{bmatrix}$
Solucao do Sistema Ux=y	$x = \begin{bmatrix} 10.420382 \\ -16.452229 \\ 11.076433 \\ -11.815287 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 10.420382 \\ -16.452229 \\ 11.076433 \\ -11.815287 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 10.420382 \\ -16.452229 \\ 11.076433 \\ -11.815287 \end{bmatrix}$
Tempo de Execucção	0.126 s	0.047 s	0.02 s

Fonte: Autoria própria (2013)

3.3.3 Problema III M5x5

O problema M5x5 é de autoria própria e segue os mesmo padrões usados nos demais problemas. Obtivemos os seguintes resultados mostrados na tabela 8:

Tabela 8: Problema III m5X5 comparativo entre os métodos

Matriz	$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 & 9 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$	Vetor	$b = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ 56 \\ 63 \\ 100 \end{bmatrix}$
Matriz	L U Tradicional	DOOLITTLE	CROUT
	$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & -1 & -0.1 & 1 & 0 \\ 3.5 & -10 & -1.7 & 1.26 & 1 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & -1 & -0.1 & 1 & 0 \\ 3.5 & -10 & -1.7 & 1.26 & 1 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -20 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 7.85 & 0 \\ 7 & -10 & 34 & 9.95 & 54.184 \end{bmatrix}$
	$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 3.5 & -12.5 \\ 0 & 0 & -20 & -21.5 & 107.5 \\ 0 & 0 & 0 & 7.85 & -21.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54.184 \end{bmatrix}$	$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 3.5 & -12.5 \\ 0 & 0 & -20 & -21.5 & 107.5 \\ 0 & 0 & 0 & 7.85 & -21.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54.184 \end{bmatrix}$	$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -0.5 & -4.5 \\ 0 & 1 & 4 & 3.5 & -12.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.075 & -5.375 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.707 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Solucao do Sistema Ly=b	$Y = \begin{bmatrix} -11 \\ 21.5 \\ -116.5 \\ 100.35 \\ 28.25 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} -11 \\ 21.5 \\ -116.5 \\ 100.35 \\ 28.25 \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 21.5 \\ 5.825 \\ 12.783 \\ 0.5214 \end{bmatrix}$
Solucao do Sistema Ux=y	$x = \begin{bmatrix} -3.8430 \\ 4.8629 \\ -6.6318 \\ 14.195 \\ 0.5214 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} -3.8430 \\ 4.8629 \\ -6.6318 \\ 14.195 \\ 0.5214 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} -3.8430 \\ 4.8629 \\ -6.6318 \\ 14.195 \\ 0.5214 \end{bmatrix}$
Tempo de Execucção	0.188 S	0.01 s	0.02 s

Fonte: Fonte própria (2013)

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após a realização de todos os testes da forma como descritos no capitulo anterior, podemos avaliar os resultados obtidos, o fator que foi levado em consideração para o analise dos resultados, foi o tempo de execução.

De acordo com o método de fatoração LU tradicional que utiliza-se do método da Eliminação de Gauss, através do qual se obtém os elementos de L , composta pelos multiplicadores, e U , composta pelos elementos restantes da eliminação podemos perceber que nos 3(três), problemas utilizados comparado com os métodos de Doolittle e Crout que utiliza-se de formulas para sua resolução, o método de LU Tradicional exige mais tempo de execução.

No problema 1, obtivemos que os métodos de Doolittle e Crout foram mais rápido no processo de execução que o de LU tradicional, obtendo respectivamente 0.042s, 0.02s e 0.142s. O método de Doolittle e LU tradicional obteve os mesmo resultados para as matrizes L e U, sendo que o em Crout percebemos que a matriz U foi composta por diagonal principal unitária, já em Doolittle ocorreu o mesmo só que na matriz L.

No problema 2, obtivemos que os métodos de Doolittle e Crout foram mais rápido no processo de execução que o de LU tradicional, obtendo respectivamente 0.047s, 0.02s e 0.126s. O método de Doolittle e LU tradicional obteve os mesmo resultados para as matrizes L e U, sendo que o em Crout percebemos que a matriz U foi composta por diagonal principal unitária, já em Doolittle ocoreu o mesmo só que na matriz L.

No problema 3, obtivemos que o método de Doolittle foi mais rápido no processo de execução que o de LU tradicional e Crout, obtendo respectivamente 0.01s, 0.188s e 0.02s. O método de Doolittle e LU tradicional obteve os mesmo resultados para as matrizes L e U, sendo que o em Crout percebemos que a matriz U foi composta por diagonal principal unitária, já em Doolittle ocoreu o mesmo só que na matriz L.

Podemos notar que o método de Doolittle e LU tradicional obteve os mesmo resultados para as matrizes L e U nos três problemas, havendo diferença só no tempo de execução onde nos três problemas o método de Doolittle apresentou menor tempo de execução que o de LU.

Já o método de Crout comparado com o de Doolittle apresenta diferença, pois a matriz L que em Doolittle é composta por uma diagonal unitária, não aparece em Crout que apresenta sua diagonal unitária na matriz U. Neste método apresenta uma diferença também nos valores das matrizes L e U comparado com o método de fatoração LU Tradicioanl e Doolittle, mas obtém os mesmo resultados finais que os outros. No método de Crout obtivemos a melhor execução computacional comparando com os outros métodos em todos os problemas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos diretos e iterativos usados na resolução de sistemas de equações lineares diferem em vários aspectos tais como: quanto nùmero de iterações, convergência, erro de arredondamento, entre outros. Mesmo assim eles, possuem em comum o mesmo objetivo, que no qual é encontrar um vetor solução que satisfaça todas as equações do sistema simultaneamente.

Dentre outros aspectos, podemos dizer que os métodos diretos possuem uma pequena vantagem em relação aos métodos iterativos por poder ser utilizado na resolução de qualquer tipo de sistema de equações lineares, desde que possua a matriz dos coeficientes não singular, ou seja, que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero.

Através dos métodos diretos aqui vistos é impossível chegarmos a solução do sistema quando trabalhado com pivô nulo, e quando trabalhado com pivô próximo de zero este método apresenta problemas com erros de arredondamento que afetam a solução final do sistema. Uma maneira de conter estes fatores e a utilização das técnicas de pivoteamento.

Através dos resultados obtidos nos problemas M3x3, M4x4 e M5x5 percebemos que todos os métodos encontraram as soluções esperadas, mas que houve uma pequena diferença no tempo de processamento. O método de Crout, que demostrou um bom desempenho computacional, quando comparado a outros métodos diretos LU Tradicional e Doolittle onde notou-se uma tendência de ter um menos tempo de processamento.

Contudo, ao resolver um sistema de equações lineares se faz necessário primeiramente conhecer a natureza do problema para que em seguida possamos escolher qual o método que deve ser utilizado para resolver o problema e obter dessa forma um resultado mais preciso e satisfatório.

Os objetivos gerais e específicos do trabalho foram alcançados com êxito.Deixamos como sugestão para trabalhos futuros a implementação de pivoteamento nos métodos estudados, além de testes em matrizes de maior porte, onde deve-se buscar verificar se a tendência de tempo de processamento menor do método de Doolittle se consolida.

REFERÊNCIAS

BURIAN, Reinaldo; LIMA, Antonio Carlos de; JUNIOR. e Annibal Hetem. **Fundamentos de Informática: Cálculo Numérico**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

ARENALES, Selma. e DAREZZSO, Arthur . **Cálculo Numérico**. São Paulo: Thompson, 2008.

RUGGIERO, Márcia A Gomes. e LOPES, Vera Lúcia da Rocha . **Calculo Numério: Aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo: Makron Books 1996.

BARROSO, Leônidas Conceição; BARROSO, Magali Maria de Araujo; CAMPOS, Frederico Ferreira Filho; CARVALHO, Márcio Luiz de e MAIA, Mirian Lourenço. **Cálculo Numérico: com aplicações**. São Paulo: Harbra, 1987.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. **Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

BURDEN, Richard L. E FAIRES, Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: CENGAGE 2008.

CAMPOS Filho, Frederico Ferreira. **Algoritmos Numéricos.** 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**. 2.ed. São Paulo: McGraw Hill, 1977.

FÉ, Dakson Câmara da. **Métodos Numéricos para Resolução de Sistemas de Equações Lineares**. 2011. 41 f. TCC (Graduação em Ciẽncia e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Angicos, 2011.

TONET, Bruno; KOLIVER, Cristian. **Introdução aos Algoritmos**. Nícleo de Apoio à Aprendizagem de Programação – NAPRO. Universidade de Caxias do Sul – UCS.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** São Paulo. Edgard Blucher, 1974.

GALVÃO, Lauro César; e NUNES, Luiz Fernando. **Notas de Aulas Cálculo Numérico**. Universidade Federal Tecnológica do Paraná – UFTPR.

LEON, Steve J. **Álgebra Linear com Aplicações.** 8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. São Paulo: CENGAGE Learning, 2009.

FERREIRA, Jose Álvaro Tadeu. **Resolução de Sistemas de Equações Lineares Simultâneas. Notas de aulas**. Disponível em: <www.ebah.com.br/content/ABAAABO2cAK/sistemas-lineares>. Acesso em: 10 abr. 2011.

FRANCO, Neide Bertold. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice Hall, 2006.

FREITAS, Sérgio Roberto de. **Métodos Numéricos.** Notas de Aula, disponível em **http://www.decom.ufop.br/bob/com400/livros/livro_1.pdf** . Acesso em 06 de Set. 2012.

BLAS: Basic linear algebra subprograms. http://www.netlib.org/blas/, acesso em 15 de Jan. 2012.

S.J. LEON. **Álgebra Linear: com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1943.

NETLIB, **método iterativo de Gauss Jacobi**, disponível em http://netlib.org/linalg/html_templates/node12.html, acesso em 15 de Jan. 2012.

NETLIB, **método iterativo de Gauss Seidel**, disponível em http://netlib.org/linalg/html_templates/node14.html, acesso em 15 de Jan. 2012.

GAVALA, Francisco Javier Cobos. **Cálculo Numérico**: Apuntes para el curso de 2001-2002. Disponível em: <www.decom.ufop.br/bob/com400/livros/ap_cal_num_esp.PDF>. Acesso em: 30 ago. 2011.