UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS ANGICOS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS, TECNOLÓGICAS E HUMANAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

FERNANDO HENRIQUE NOGUEIRA AMARAL

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE ALGUMAS NORMAS MATRICIAIS, CONDICIONAMENTO DE MATRIZES E SENSIBILIDADE

ANGICOS-RN
2013

FERNANDO HENRIQUE NOGUEIRA AMARAL

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE ALGUMAS NORMAS MATRICIAIS, CONDICIONAMENTO DE MATRIZES E SENSIBILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA Campus Angicos, para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. M. Sc. Ivan Mezzomo – UFERSA

ANGICOS-RN
2013

Catalogação na Fonte

Biblioteca Universitária Campus Angicos (BCA-UFERSA)

A485r Amaral, Fernando Henrique Nogueira.
Revisão bibliográfica sobre algumas normas matriciais, condicionamento de matrizes e sensibilidade / Fernando Henrique Nogueira Amaral. – Angicos, RN : UFERSA, 2013.
53 f.

Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Campus Angicos.
Orientador: Prof.º M.Sc. Ivan Mezzomo.

1. Sistemas de equações lineares. 2. Normas matriciais. 3. Condicionamento. 4. Sensibilidade. I. Título.

RN/UFERSA/BCA CDD 512.5

Ficha Catalográfica elaborada pelo Bibliotecário-Documentalista
Sale Mário Gaudêncio – CRB15/476

FERNANDO HENRIQUE NOGUEIRA AMARAL

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE ALGUMAS NORMAS MATRICIAIS, CONDICIONAMENTO DE MATRIZES E SENSIBILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA Campus Angicos, para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

APROVADA EM: 10 / 04 / 2013

BANCA EXAMINADORA

Ivan Mezzomo

Prof. Me. Ivan Mezzomo - UFERSA
Orientador

MMenezes

Prof. Me. Matheus da Silva Menezes - UFERSA
Primeiro Membro

Ana Cristina Girão e Silva

Prof. Ma. Ana Cristina Girão e Silva - UFERSA
Segundo Membro

A Antônio Alves de Paiva (in memoriam), que foi meu avô, que apoiou meus estudos, e que sempre será minha fonte de inspiração, um exemplo de pessoa a ser seguido.

A minha mãe e avó Severina Nogueira que sempre apoiou e incentivou meus estudos mesmo em momentos difíceis.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus por está sempre presente em minha vida, me dando sabedoria, força, paciência, saúde e fé.

Agradeço de uma forma especial a minha mãe/avó Severina Nogueira que sempre me deu apoio e incentivo em toda parte da minha vida mesmo em momentos difíceis, e que apesar de ser semianalfabeta me deu uma ótima educação para enfrentar os problemas futuros da vida, um exemplo de pessoa a ser seguido. E também meu tio Francisco Ronildo Freire que me deu apoio e que me ensinou muitas coisas na vida.

Ao meu tio Fernando Paiva que sempre teve tempo para mim, mesmo em horas inoportunas, me dando apoio, base e atenção. Aos meus tios Airene Paiva e Sufia Nunes que sempre ajudaram e apoiaram meus estudos, servindo de base para que eu obtivesse sempre uma boa educação. A minha mãe Rita Nogueira, minha irmã Bianca Nogueira, meu Pai Arinilson Amaral de Paiva por apoiar meus estudos. A minha tia Goreth e tia Maria que sempre me deram apoio em momentos difíceis. Agradeço de uma forma geral a toda minha família que me apoiaram direta e/ou indiretamente para conclusão desse curso.

Agradeço ao professor e amigo Ivan Mezzomo, que me orientou na construção deste trabalho com paciência e total disponibilidade.

Todos os professores da UFERSA que me deram apoio e conhecimento, em especial a Ana Cristina, Matheus Menezes, Alexandro Pereira, Marcilene Nóbrega, Sâmea Valensca, Núbia, Éder Jofre, Márcio Furukava, Roselene Alcântara e Alceu.

Aos meus amigos de Rafael Godeiro e também aos meus colegas de curso pelas horas de aperreio e alegria durante o curso esses anos, em particular aos amigos Nathália Reis, Ornella Lacerda, Danielly Cristina, João Emanuell, Francisco Gouveia, Thalis Ginani, Thallis Thauam, Filipe Carlos. Agradeço também a todos meus amigos e colegas que conheci em Angicos.

“O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”

(Albert Einstein)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar, em caráter bibliográfico, alguns tipos de normas matriciais e condicionamento, através da literatura usualmente utilizada no curso de álgebra linear numérica. Nele será enfatizado a importância do tema abordado para análise de problemas de sistemas lineares. Na engenharia, o uso de técnicas matemáticas é fundamental para o estudo de soluções de problemas, como o de problemas de sistemas de equações lineares. Este trabalho descreve a importância na área correlata específica de se estudar o assunto puramente abordado. No presente trabalho serão feitos algumas aplicações através de exemplos para se obter o conhecimento prático de alguns tipos de normas matriciais e normas matriciais subordinadas. Analisamos também, o condicionamento de matrizes e sensibilidade da solução no uso de problemas de sistemas lineares de equações. Abordamos a relação existente entre uma norma matricial subordinada e sua respectiva norma vetorial. Veremos também, que o condicionamento da matriz define o quão sensível é um sistema, e por fim, apresentamos alguns exemplos.

Palavras-chave: Sistemas de equações lineares. Normas matriciais. Condicionamento. Sensibilidade.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As matrizes são muito utilizadas na computação para representarmos translação, rotação, para resolver sistemas de equações, etc. Na engenharia elétrica, por exemplo, é muito difícil resolver problemas de circuitos elétricos e linhas de transmissão de energia sem matrizes. Toda matriz quadrada (número de linhas igual ao número de colunas) tem um número associado que chamamos de determinantes.

O estudo de matrizes retoma aos tempos mais antigos da história da humanidade, sua teoria subjacente não foi modificada de modo radical, e sua aplicação possui um forte objeto histórico na resolução de sistema de equações lineares.

Segundo Burden e Faires (2008, p.331)

> Os sistemas de equações lineares estão associados a muitos problemas no campo da engenharia e da ciência, bem como com aplicações da matemática às ciências sociais e aos estudos quantitativos nos problemas de administração e economia.

Neste trabalho é feito um estudo acerca de matrizes em relação a alguns tipos de normas e condicionamento. Veremos sua importância nos cálculos de sistemas de equações lineares, ou seja, serão analisados os aspectos práticos sobre teoria das matrizes.

Preocuparemos nos com a precisão das soluções computadorizadas de sistemas de equações lineares, já que essas soluções podem ter diferentes precisões. As soluções e as precisões dependem da sensibilidade, que pode ser medida de acordo com o condicionamento. Para analisar o condicionamento de uma matriz é necessário antes a constituição de resultados sobre alguns tipos de normas matriciais e normas matriciais subordinadas.

1.1 JUSTIFICATIVA

.

De acordo com os comentários abordados acima, fica evidente a importância de se estudar normas de matrizes para a resolução de sistemas lineares, pois além do seu interesse teórico inerente, possui uma vasta aplicação prática em inúmeras áreas correlatas.

1.2 OBJETIVOS DO ESTUDO

1.2.1 Objetivo geral

Propor uma revisão bibliográfica sobre tipos de normas matriciais e de condicionamento disponível na literatura e estudar suas consequências.

1.2.2 Objetivo específico

- Fazer uma revisão bibliográfica sobre normas matriciais e normas matriciais subordinadas
- Fazer uma revisão bibliográfica sobre condicionamento e sensibilidade.
- Abordar a relação existente entre uma norma matricial subordinada e sua respectiva norma vetorial.
- Abordar a relação existente entre condicionamento da matriz e sensibilidade de um sistema de equações lineares.

1.3 METODOLOGIA

O presente trabalho foi desenvolvido através de uma pesquisa exclusivamente bibliográfica sobre normas matriciais e condicionamento, embasado na literatura acadêmica da área específica, com a finalidade de se obter o conhecimento do assunto abordado visando o funcionamento e aplicações.

O presente trabalho está constituído e organizado de acordo com a consequente formação metodológica. No capítulo 1 apresentamos a organização metodológica, justificativas e objetivo do estudo. No capítulo 2 temos a fundamentação teórica matemática que nos dará apoio aos assuntos tratados posteriormente. No capítulo 3 será abordado o estudo de algumas tipos de normas matriciais. No capítulo 4 veremos o estudo das normas matriciais subordinadas. O capítulo 5 será analisado o condicionamento de matrizes. O capítulo 6 será focado no estudo sobre sensibilidade da solução de sistema de equações lineares. E enfim, no capítulo 7 as conclusões em relação ao assunto estudado.

2 PRELIMINARES

Para melhor entendimento deste trabalho é indispensável um conhecimento prévio sobre alguns conceitos de álgebra linear, tais como matrizes e determinantes, sistemas de equações lineares, vetores e espaço vetorial, norma vetorial e produto interno.

2.1 MATRIZES

Nessa seção iremos definir, classificar e introduzir operações entre matrizes. Todas as definições foram embasadas de acordo com Steinbruch (2010).

2.1.1 Definição, representação e ordem

Definimos uma matriz de ordem m por n como sendo um quadro de $m \times n$ elementos armados em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Se quisermos nos referir a matrizes sem escrever especificamente todos os elementos, usaremos letras maiúsculas A, B, C e assim por diante. Os elementos da matriz A estão cobertos por dois índices: a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna em que o elemento da matriz refere-se. Com isso podemos abreviar a matriz por $A = [a_{ij}]$, com i (linha) variando de 1 a m e j (coluna) variando de 1 a n.

Representamos a matriz A de ordem m por n, por $A_{(m,n)}$. Ou seja, se essa matriz tiver 2 linhas e 3 colunas, escrevemos $A_{(2,3)}$ e dizemos que a matriz é de ordem 2 por 3.

Se uma matriz for de ordem m por 1 será denominada matriz-coluna e se for da ordem 1 por n será chamada de matriz-linha.

Uma matriz é denominada de matriz zero quando todos seus elementos a_{ij} são nulos, seja ela de qualquer ordem.

Seja A uma matriz em que $m \neq n$, então A será chamada de matriz retangular. Se $m = n$ então será dita matriz quadrada. Quando o número de linhas é igual ao número de colunas, dizemos que a ordem dessa matriz é n por n, ou somente n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, os elementos a_{ij}, no qual $i = j$, compõem a diagonal principal e é composta pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Já se os elementos a_{ij}, no qual $i + j = n + 1$, formam a diagonal secundária e é constituída pelos elementos $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$.

Quando uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ tiver os elementos $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ esta será chamada de matriz diagonal. Então se nessa matriz os elementos da diagonal principal forem iguais será denominada de matriz escalar. E por fim, se essa matriz tiver os elementos $a_{ii} = 1$ é chamada de matriz unidade ou identidade, na qual é denotada por I_n, ou apenas I.

Duas matrizes de ordem m por n, serão ditas iguais se os elementos a_{ij} forem iguais para todo i e j.

2.1.2 Adição e Subtração de Matrizes

Matrizes só podem ser somadas e subtraídas se forem de mesma ordem. Para isso devemos adicionar ou subtrair os seus elementos correspondentes. Por exemplo, a diferença de duas matrizes quaisquer $A = [a_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, de mesma ordem, resultará numa matriz $B = [b_{ij}]$ também de mesma ordem, em que: $b_{ij} = a_{ij} - c_{ij}$. Assim como a soma das matrizes A e C poderá resultar numa matriz D também de mesma ordem, em que: $d_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$. A adição de matrizes tem como propriedades:

I. $A + (B + C) = (A + B) + C$

II. $A + 0 = 0 + A = A$

III. $-B + B = B - B = 0$

IV. $A + B = B + A$

2.1.3 Produto de uma matriz por um escalar

O produto de uma matriz $B = [b_{ij}]$ por um escalar qualquer α resultará numa matriz $C = [c_{ij}]$ em que: $c_{ij} = \alpha b_{ij}$. Sejam α e β escalares, A e B matrizes de ordem $m \times n$, então temos como propriedades do produto de uma matriz por um escalar:

I. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

II. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

III. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

IV. $1B = B$

2.1.4 Produto de uma Matriz por outra

Para poder multiplicar uma matriz qualquer A por uma matriz B só será possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. O resultado dessa multiplicação resultará numa matriz C cujo número de linhas será igual ao da matriz A e o número de colunas igual ao da matriz B. Por exemplo, uma matriz $A_{(1,2)} = [a_{ij}]$ multiplicando uma matriz $B_{(2,3)} = [b_{ij}]$ resultará numa matriz $C_{(1,3)} = [c_{ij}]$. A multiplicação nesse caso é efetuada da seguinte maneira:

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}$$

$$c_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22}$$

$$c_{13} = a_{11} \times b_{13} + a_{12} \times b_{23}$$

Assim a matriz $C_{(1,3)} = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}]$.

Obedecendo a condição de multiplicação de matrizes, nesse caso, não será possível multiplicar a matriz B por A, somente A por B.

Temos como propriedades da multiplicação de uma matriz por outra:

I) Dadas as matrizes A, B, C de ordem $(m, n), (n, s), (s, r)$, respectivamente, temos:

$$(AB)C = A(BC)$$

II) Dadas as matrizes A, B de ordem (m, n) e C de ordem (n, s), temos:

$$(A + B)C = AC + BC$$

III) Dadas as matrizes A, B, C de ordem $(n, s), (n, s), (m, n)$, respectivamente, temos:

$$C(A + B) = CA + CB$$

IV) Se $A_{(m,n)}$, I_m e I_n matrizes identidade de ordem m e n temos:

$$I_m A = A I_n = A$$

V) Dadas as matrizes A e B de ordem (m, n) e (n, s), respectivamente. Temos, para todo escalar k:

$$(kA)B = A(kB) = k(AB)$$

VI) A multiplicação matricial não é, em geral, comutativa.

VII) Dadas duas matrizes A e B, se o produto delas for a matriz zero [0], não é necessário que A ou B sejam matrizes zero.

Se A e B fossem matrizes quadradas de ordem n, então, seria possível efetuar a multiplicação AB e BA com resultados, em geral, diferentes. Dada uma matriz identidade I de ordem n, o produto IA ou AI é igual a matriz A. Se o produto AB ou BA for igual a uma matriz identidade I, dizemos que B é inversa de A (representado por A^{-1}).

2.1.5 Matriz Transposta, Matriz Simétrica e Antissimétrica e Matrizes Triangulares

Dada uma matriz A, de ordem m por n, sua transposta é representada por A^T e sua ordem será n por m. Ou seja, o que é linha vira coluna e o que é coluna vira linha. Nas propriedades da matriz transposta temos:

I) $(A+B)^T = A^T + B^T$

II) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

III) $(A^T)^T = A$

IV) $(AB)^T = B^T A^T$

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se sua transposta A^T for igual a A. E se multiplicarmos uma matriz quadrada A pela sua transposta A^T obteremos como resultado uma matriz simétrica. Se $A^T = -A$, é denominada de matriz antissimétrica e os elementos da diagonal principal serão nulos.

Uma matriz é denominada matriz triangular superior quando todos os elementos abaixo da diagonal principal forem nulos, e será matriz triangular inferior se os elementos acima da diagonal principal forem nulos.

2.2 DETERMINANTES

2.2.1 Classe de uma Permutação

Segundo Steinbruch (2010) tendo uma permutação

$$w \quad x \quad z \quad y$$

dos elementos w, x, y, z e aceitando para permutação principal a permutação:

$$w \quad x \quad y \quad z$$

A quantidade de permutações de n objetos é dada por $n!$ (n fatorial) e $n! = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (isso se $n > 0$). Então, o total de permutações dos elementos xy é: $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Quando dois elementos de uma permutação estão em ordem inversa à permutação principal dizemos que eles formam uma inversão. No caso acima, vimos que y e z formam uma inversão. Quando tivermos um número de permutações, chamamos de classe ímpar, e quando o número de permutações for par chamamos de classe par. Então, por exemplo, a permutação $wxzy$ é de classe ímpar, pois apresenta uma inversão da permutação principal.

2.2.2 Determinante de uma matriz

O produto dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada é chamado de termo principal e da diagonal secundária é denominado de termo secundário.

De acordo com Steinbruch (2010, p. 421)

> Chama-se determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices do termo principal, fixados os primeiros índices, e fazendo-se preceder os produtos do sinal $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar.

A ordem de um determinante é de acordo com a ordem da matriz. Por exemplo, se uma matriz é de ordem 4, então, seu determinante será um polinômio de ordem 4.

Podemos representar o cálculo do determinante de uma matriz A ($\det A$), colocando entre dois traços verticais os elementos da matriz:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Para calcular o determinante de uma matriz A de ordem 2, devemos subtrair o termo principal do termo secundário. Então:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para calcular a matriz inversa A^{-1} de uma matriz A de ordem 2×2 usamos o seguinte modo prático:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (4)$$

2.2.3 Cálculo do determinante de terceira ordem

Dada uma matriz A de ordem 3, seu determinante é calculado também de acordo com a definição de determinantes de matrizes. Então:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (5)$$

Outra maneira de escrever essa fórmula para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3 é fazendo o desenvolvimento do determinante pela 1ª linha. Ou seja, multiplica o componente a_{11} pelo determinante menor da submatriz de A, que se obtém eliminando a 1ª linha e a 1ª coluna. Depois faz-se o mesmo para os elementos a_{12} e a_{13}. E por fim, faz-se os três produtos resultantes serem antecedidos alternadamente pelos sinais $+$ e $-$, começando pelo sinal $+$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Podemos calcular o determinante de uma matriz desenvolvendo-o por qualquer coluna ou linha tomando o devido cuidado com a alternância dos sinais $+$ e $-$ que antecedem os produtos desenvolvidos. A alternância dos sinais é $+$ e $-$ dos produtos por linha e a alternância dos sinais por coluna é:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Esse tipo de método pode ser usado para calcular determinante de ordem quatro ou de ordem n, tomando o devido cuidado com a alternância dos sinais. Entretanto, quanto maior a ordem da matriz mais elevado será o número de operações a serem feitas, o que pode torná-la quase que impraticável.

Pode-se também calcular o determinante de uma matriz de ordem 3 através da regra de Sarrus. Nela repete-se a primeira e segunda coluna à direita da matriz. Feito isso, devemos somar os produtos da diagonal principal e das outras duas paralelas a mesma, e por fim, subtrair os produtos da diagonal secundária e das outras duas paralelas a ela:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

2.2.4 Propriedades dos determinantes

Apresentamos a seguir as propriedades dos determinantes de acordo com Steinbruch (2010):

I) O determinante de uma matriz A não se altera quando trocamos as linhas pelas colunas.

II) Se a matriz A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, o determinante é nulo.

III) Se a matriz A tem duas linhas (ou duas colunas) iguais, o determinante é nulo.

IV) Se na matriz A, duas linhas (ou colunas) têm seus elementos correspondentes proporcionais, o determinante é nulo (numa matriz A, dois elementos são correspondentes quando, situados em linhas diferentes, estão na mesma coluna, ou quando, situados em colunas diferentes, estão na mesma linha):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = 0$$

V) Se na matriz A, cada elemento de uma linha (ou coluna) é uma soma de duas parcelas, o determinante de A pode ser expresso sob a forma de uma soma dos determinantes de duas matrizes, a saber:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

VI) O determinante de uma matriz triangular A (superior ou inferior) é igual ao termo principal, isto é, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

VII) Trocando-se entre si duas linhas (ou colunas) da matriz A, o determinante muda de sinal, ou seja, fica multiplicado por -1.

VIII) Quando multiplicarmos por um número real, todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) da matriz A, o determinante fica multiplicado por esse número.

IX) O determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma linha (coluna) da matriz A os elementos correspondentes de outra linha (coluna) previamente multiplicados por um número real k diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 & c_2 + kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.2.5 Cálculo de um determinante de qualquer ordem

Segundo Steinbruch (2010) através do processo de triangulação podemos calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem que seja maior ou igual a dois. Ou seja, transformar uma matriz em uma matriz triangular superior (ou inferior), obedecendo as propriedades dos determinantes para manter o resultado do $\det A$ inalterado. Esse processo é feito através de operações com a finalidade de transformar todos os elementos da diagonal principal no número 1, exceto o último, e todos os elementos abaixo (para matriz triangular superior) e acima (para matriz triangular inferior) da diagonal principal igual a zero.

Nos elementos da diagonal principal dois fatos podem ocorrer. Primeiro, se um elemento é igual a zero, deve-se então fazer a troca de linhas e multiplicar o determinante por -1 para compensar a operação feita e conservar o valor do determinante. Segundo, se o elemento for igual a w e para transforma-lo em 1 tiver que multiplicar a linha inteira por $1/_{w}$, com isso deve-se multiplicar o determinante da matriz por w para compensar (STEINBRUCH, 2010).

Observação: Uma matriz quadrada cujo determinante é diferente de zero é chamada de matriz não singular ou regular. Caso contrário é chamado de matriz singular.

2.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Equação linear é representada da seguinte forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \tag{6}$$

onde, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são reais fixos chamados de coeficientes das incógnitas, b de real denominado termo independente e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis.

Então várias equações lineares definem como um sistema linear de m equações lineares e n incógnitas. Sua forma geral é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7}$$

onde a_{ij}, $i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1,2, \ldots, n$ são números reais denominados de coeficientes do sistema, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas do sistema, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são reais denominados termos independentes.

Um sistema linear pode ser representado por matrizes, da forma $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficientes, x é a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes. Em um sistema m equações e n incógnitas teremos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{8}$$

2.4 VETORES

De acordo com Boldrini (1986) algumas grandezas físicas, soluções de sistemas lineares ou de equações diferenciais podem ser representados por vetores. Em um sistema de coordenadas ortogonais a sua representação em geral simplifica a resolução de problema. No plano (no espaço $\mathbb{R}^2$) um vetor aleatório em que seu ponto inicial está na origem de um sistema de coordenadas retangulares, as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final de $\vec{v}$ são denominadas componentes de $\vec{v}$, então teremos:

$$\vec{v} = (v_1, v_2)$$

E esse vetor pode ser representado na forma matricial. Neste caso o vetor pode ser visto como uma matriz coluna:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Assim como no plano, no espaço $\mathbb{R}^3$ podemos representar vetores por números reais por meio de um sistema de coordenadas retangulares. No espaço $\mathbb{R}^3$ um vetor qualquer em que o ponto inicial esteja na origem, as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final do vetor serão chamadas de componentes de $\vec{v}$ e podemos dizer que:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

2.5 ESPAÇOS VETORIAIS

De acordo com Boulos (1987), um conjunto qualquer V de elementos não vazio em que se têm definidas as operações de adição e multiplicação por escalares, onde a multiplicação por escalar é tida como uma regra que relaciona para cada elemento w em V outro elemento kw, denominado múltiplo de w por k. E a adição é tida como uma regra que relaciona cada par de elementos u e w em V a um elemento $u + w$, que é dito soma de u por w. É necessário que os axiomas abaixo sejam satisfeitos para que V seja um espaço vetorial em quaisquer elementos u, v e w em V e quaisquer escalares k e p, temos:

I) Se w e v são elementos de V então $w + v$ é um elemento de V.

II) $w + v = v + w$

III) $w + (v + u) = (w + v) + u$

IV) Existe em V um elemento 0, denominado vetor nulo de V, onde $0 + w = w + 0 = w$, para cada w pertencente a V.

V) Para cada w pertencente a V, existe outro elemento $-w$, denominado inverso de w, onde $w + (-w) = (-w) + w = 0$.

VI) Se p é escalar qualquer e v é um elemento em V, então o produto pv é um elemento de V.

VII) $p(w + v) = pw + pv$

VIII) $(k + p)v = kv + pv$

IX) $k(pw) = (kp)w$

X) $1u = u$

Por exemplo, o conjunto dos vetores do espaço onde: $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$, é um espaço vetorial usando as operações usuais.

2.6 PRODUTO INTERNO, ESPAÇO VETORIAL EUCLIDIANO E NORMA DE UM VETOR

Um produto interno para cada par de vetores u e v associa um número real, em um espaço vetorial V, representado por $\langle u, v\rangle$, que satisfaça as seguintes condições:

I) $u \cdot v = v \cdot u$

II) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

III) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$, em que k seja qualquer real.

IV) $u \cdot u \geq 0$ e $u \cdot u = 0$ se, e somente se, $u = 0$

Chamamos de produto interno dos vetores u e v o número real $u \cdot v$.

Espaço vetorial euclidiano é um espaço vetorial real em que está definido o produto interno com dimensão finita.

A norma ou módulo é o comprimento de um vetor representado por um número real não negativo e denotado por $\|\vec{v}\|$. No espaço bidimensional podemos obter a norma de um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ pelo teorema de Pitágoras, que será dado por:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{9}$$

Também com o teorema de Pitágoras, vetores no $\mathbb{R}^3$ em que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ podemos produzir a norma do mesmo, só que nessa caso deve-se efetuar duas aplicações do teorema:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \ v_2^2 + \ v_3^2} \tag{10}$$

Temos como propriedade da norma vetorial em $\mathbb{R}^n$:

I) $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

II) $\|v\| = 0$ se e somente se, $v = 0$,

III) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$,

IV) $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ para todo $v, u \in \mathbb{R}^n$.

A norma de um vetor representa sua magnitude. Segundo Leon (2011) em $\mathbb{R}^n$ existem alguns tipos de normas na qual a norma-p é a forma genérica, definida por:

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p} \tag{11}$$

para $1 \leq p < \infty$ e o vetor v de dimensão n. As seguintes normas são casos particulares da norma-p:

$$\|v\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |v_j| \tag{12}$$

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2} \tag{13}$$

onde $\|v\|_1$ e $\|v\|_2$, são as normas 1 e 2, respectivamente.

Outra norma importante é a norma infinito definida por:

$$\|v\|_{\infty} = max_i|v_i| \tag{14}$$

3 NORMAS MATRICIAIS

De acordo com Leon (2011) o conceito de norma vetorial pode ser estendido para matrizes, então as normas matriciais representam a magnitude de uma matriz, assim como as normas vetoriais representam magnitudes para vetores. Uma norma $\|\cdot\|$ do espaço vetorial das matrizes $m \times n$ é uma função que associa a cada matriz um número real não negativo que satisfaz as seguintes condições: Seja α qualquer escalar, A e B matrizes:

I) $\|A\| = 0$ se e somente se $A = 0$

II) $\|A\| > 0$

III) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

IV) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

As normas matriciais que iremos estudar neste trabalho são:

1. Norma de soma máxima de coluna ou norma 1:

$$\|A\|_1 = max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{15}$$

é o maior valor da soma de todos os elementos de cada coluna da matriz.

2. Norma de soma máxima de linha ou norma ∞:

$$\|A\|_\infty = max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{16}$$

é o maior valor da soma de todos os elementos de cada linha da matriz.

3. Norma de Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \tag{17}$$

Vamos provar que as três normas acima satisfazem as propriedades de norma matricial.

Proposição 3.1: Seja A uma matriz $m \times n$. A norma $\|A\|_1$ definida por

$$\|A\|_1 = max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

é uma norma matricial.

Prova: (I) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz nula de ordem $m \times n$. Então, $a_{ij} = 0$ para todo $i \in [1, m]$ e para todo $j \in [1, n]$. Logo,

$$A = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow |a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \|A\|_1 = 0$$

(II) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz não nula de ordem $m \times n$. Então, existe pelo menos um $i \in [1, m]$ e pelo menos um $j \in [1, n]$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Suponha que $a_{kl} \neq 0$ tal que $k \in [1, m]$ e $l \in [1, n]$. Logo,

$$a_{kl} \neq 0 \Rightarrow |a_{kl}| \ge 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|a_{kl}| \ge 0$$

$$\Rightarrow max_{1\le l\le n}\sum_{k=1}^{n}|a_{kl}| \ge 0$$

$$\Rightarrow \|A\|_1 \ge 0$$

(III) Sejam α um escalar e A uma matriz $m \times n$. Pela propriedade de multiplicação de matrizes por um escalar, temos que $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$ para todo $i \in [1, m]$ e para todo $j \in [1, n]$. Então,

$$|\alpha| \cdot \|A\|_1 = |\alpha| \left(max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij}| \right)$$

$$= max_{1 \le j \le n} \left(|\alpha| \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij}| \right)$$

$$= max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha \, a_{ij}|$$

$$= \|\alpha A\|_1$$

(IV) Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem $m \times n$. Então

$$\|A + B\|_1 = max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \right)$$

$$\le max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} (|\, a_{ij}| + |\, b_{ij}|) \right)$$

$$= max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} |\, b_{ij}| \right)$$

$$\le max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\, a_{ij}| + max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\, b_{ij}|$$

$$= \|A\|_1 + \|B\|_1$$

Proposição 3.2: Seja A uma matriz $m \times n$. A norma $\|A\|_\infty$ definida por

$$\|A\|_\infty = max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

é uma norma matricial.

Prova: (I) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz nula de ordem $m \times n$. Então, $a_{ij} = 0$ para todo $i \in [1, m]$ e para todo $j \in [1, n]$. Logo,

$$A = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow |a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \|A\|_{\infty} = 0$$

(II) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz não nula de ordem $m \times n$. Então, existe pelo menos um $i \in [1, m]$ e pelo menos um $j \in [1, n]$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Suponha que $a_{kl} \neq 0$ tal que $k \in [1, m]$ e $l \in [1, n]$. Logo,

$$a_{kl} \neq 0 \Rightarrow |a_{kl}| \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| \geq 0$$

$$\Rightarrow max_{1\leq k\leq n} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| \geq 0$$

$$\Rightarrow \|A\|_{\infty} \geq 0$$

(III) Sejam α um escalar e A uma matriz $m \times n$. Pela propriedade de multiplicação de matrizes por um escalar, temos que $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$ para todo $i \in [1, m]$ e para todo $j \in [1, n]$. Então

$$|\alpha| \cdot \|A\|_{\infty} = |\alpha| \left(max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}| \right)$$

$$= max_{1\leq i\leq n} \left(|\alpha| \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}| \right)$$

$$= max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha \, a_{ij}|$$

$$= \|\alpha A\|_\infty$$

(IV) Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem $m \times n$. Então

$$\|A + B\|_\infty = max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})\right)$$

$$\le max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n}(| a_{ij}| + | b_{ij}|)\right)$$

$$= max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n}| a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}| b_{ij}|\right)$$

$$\le max_{1 \le i \le n}\sum_{j=1}^{n}| a_{ij}| + max_{1 \le i \le n}\sum_{j=1}^{n}| b_{ij}|$$

$$= \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

Proposição 3.3: Seja A uma matriz $m \times n$. A norma $\|A\|_F$ definida por

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

é uma norma matricial.

Prova: (I) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz nula de ordem $m \times n$. Então, $a_{ij} = 0$ para todo $i \in [1, m]$ e para todo $j \in [1, n]$. Logo,

$$A = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow |a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}| a_{ij}| = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|A\|_F = 0$$

(II) Seja $A = \left[a_{ij}\right]$ uma matriz não nula de ordem $m \times n$. Então, existe pelo menos um $i \in [1, m]$ e pelo menos um $j \in [1, n]$ tal que $a_{ij} \neq 0$. Suponha que $a_{kl} \neq 0$ tal que $k \in [1, m]$ e $l \in [1, n]$. Logo,

$$a_{kl} \neq 0 \Rightarrow |a_{kl}| \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|\, a_{kl}| \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \|A\|_F \geq 0$$

(III) Sejam α um escalar e A uma matriz $m \times n$. Pela propriedade de multiplicação de matrizes por um escalar, temos que $\alpha A = \left[\alpha a_{ij}\right]$ para todo $i \in [1, m]$ e para todo $j \in [1, n]$. Então

$$|\alpha| \cdot \|A\|_F = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha|^2\left|a_{ij}\right|^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha\, a_{ij}\right|^2}$$

$$= \|\alpha A\|_F$$

(IV) Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de ordem $m \times n$. Então

$$\|A+B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^2 + b_{ij}^2\right)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|a_{ij}\right|^2 + \left|b_{ij}\right|^2\right)}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|^2}$$

$$= \|A\|_F + \|B\|_F$$

Vamos ver agora um exemplo de cálculo para as normas $1, \infty$ e de Frobenius.

Exemplo 3.1: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, vamos calcular $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$.

Solução:

Como $\|A\|_1$ é a máxima soma dos elementos de cada coluna da matriz em módulo, então:

Coluna 1 = $2 + 3 + 4 = 9$

Coluna 2 =$|-1| + 3 + |-2| = 6$

Coluna 3 = $3 + 4 + 1 = 8$

Conclui-se que $\|A\|_1 = 9$.

$\|A\|_\infty$ é a máxima soma dos elementos de cada linha da matriz em módulo, logo:

Linha 1 = $2 + |-1| + 3 = 6$

Linha 2 = $3 + 3 + 4 = 10$

Linha 3 = $4 + |-2| + 1 = 7$

Então $\|A\|_\infty = 10$.

E por fim, por Frobenius temos:

$$\|A\|_F = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4 + 1 + 9 + 9 + 9 + 16 + 16 + 4 + 1}$$

$$= \sqrt{69} \cong 8{,}3$$

4 NORMA MATRICIAL SUBORDINADA

Segundo Leon (2011) uma norma matricial $||A||$ está associada a uma norma vetorial $||v||$ se ela for definida por:

$$||A|| = max_{v\neq 0}\frac{||Av||}{||v||} \tag{18}$$

e a chamamos de norma matricial subordinada. As normas matriciais subordinadas também devem satisfazer as propriedades de normas matriciais.

Uma norma matricial $||A||$ é dita compatível com uma norma vetorial $||v||$ se, para qualquer matriz A e vetor v, temos que

$$||Av|| \leq ||A||||v|| \tag{19}$$

Uma norma matricial compatível $||A||$ é dita subordinada a uma norma vetorial $||v||$ se para qualquer matriz A existe um vetor v, $v \neq 0$, tal que

$$||Av|| = ||A||||v|| \tag{20}$$

Se a norma matricial for subordinada então ela é compatível. De acordo com Leon (2011) temos a seguinte proposição;

Proposição 4.1: Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor. Então a norma definida por $||A|| = max_{v\neq 0}\frac{||Av||}{||v||}$ é uma norma matricial.

Prova: (I) Se $||A|| = 0$, então $Av = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Isto implica que

$$a_j = Ae_j = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n$$

onde e_j é o vetor coluna da matriz identidade I. Logo, a matriz A deve ser nula.

(II) Para todo $v \neq 0$,

$$\frac{||Av||}{||v||} \geq 0$$

e, em decorrência,

$$\|A\| = max_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geq 0$$

(III) Sejam α um escalar e A uma matriz $m \times n$. Então

$$\|\alpha A\| = max_{v \neq 0} \frac{\|\alpha Av\|}{\|v\|}$$

$$= |\alpha| max_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

$$= |\alpha| \|A\|$$

(IV) Se $v \neq 0$, então

$$\|A + B\| = max_{v \neq 0} \frac{\|(A + B)v\|}{\|v\|}$$

$$\leq max_{v \neq 0} \frac{\|Av\| + \|Bv\|}{\|v\|}$$

$$\leq max_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} + max_{v \neq 0} \frac{\|Bv\|}{\|v\|}$$

$$= \|A\| + \|B\|$$

Assim, podemos concluir que para cada família de normas vetoriais teremos uma família de normas matriciais. E por definição dizemos que estas normas matriciais seriam subordinadas às normas vetoriais.

De acordo com Leon (2011) temos o seguinte teorema:

Teorema 4.1: Se a família de normas matriciais $\|\cdot\|_M$ é subordinada à família de normas vetoriais $\|\cdot\|_V$, então, $\|\cdot\|_M$ e $\|\cdot\|_V$ são compatíveis e as normas matriciais $\|\cdot\|_M$ satisfazem seguinte propriedade:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \tag{21}$$

Se v é um vetor qualquer, não nulo em $\mathbb{R}^n$, então

$$\frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V} \leq max_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_V} = \|A\|_M$$

logo,

$$\|Av\|_V \leq \|A\|_M \|v\|_V \tag{22}$$

Se essa última desigualdade for válida também em $v = 0$, então as normas $\|\cdot\|_M$ e $\|\cdot\|_V$ são compatíveis. Dada uma matriz B de ordem $n \times r$, e se as normas $\|\cdot\|_M$ e $\|\cdot\|_V$ forem compatíveis, teremos,

$$\|ABv\|_V \leq \|A\|_M \|Bv\|_V \leq \|A\|_M \|B\|_M \|v\|_V$$

Portanto, para todo $v \neq 0$

$$\frac{\|ABv\|_V}{\|v\|_V} \leq \|A\|_M \|B\|_M$$

então,

$$\|AB\|_M = max_{v\neq 0} \frac{\|ABv\|_V}{\|v\|_V} \leq \|A\|_M \|B\|_M$$

Agora, vamos provar que as normas matriciais utilizadas nesse estudo são normas induzidas de normas vetoriais.

Proposição 4.2: Sejam A de ordem $m \times n$ e v um vetor $n \times 1$. A norma matricial $\|A\|_1$ é subordinada a norma vetorial $\|v\|_1$.

Prova: Considerando a norma vetorial

$$\|v\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |v_j|$$

para determinar a norma matricial associada a ela temos

$$\|A\|_1 = max_{\|v\|=1} \|Av\|_1 = max_{\|v\|=1} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(|a_{ij}| |v_j| \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(|v_j|\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

$$\leq \|v\|_1 \, max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

e portanto concluímos que

$$\|A\|_1 \leq max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

Atendendo a que o máximo é atingido para um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ escolhido de forma conveniente, ou seja, provamos a equação (15). Logo,

$$\|A\|_1 = max_{j=1,\dots,n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

é uma norma matricial subordinada à norma vetorial $\|v\|_1$.

Proposição 4.3: Sejam A de ordem $m \times n$ e v um vetor $n \times 1$. A norma matricial $\|A\|_\infty$ é subordinada a norma vetorial $\|v\|_\infty$.

Prova: Considerando a norma vetorial

$$\|v\|_\infty = max_i|v_i|$$

para determinar a norma matricial associada a ela teremos

$$\|A\|_\infty = max_{\|v\|=1}\|Av\|_\infty$$

Logo

$$\|Av\|_\infty = max_{i=1,\dots,n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j\right|$$

$$\leq \left(max_{i=1,\dots,n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)max_{j=1,\dots,n}|v_j|$$

$$= \left(max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \|v\|_1$$

então

$$\|A\|_\infty \leq max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Atendendo a que o máximo é atingido para um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ escolhido de forma conveniente, e então $\|A\|_\infty$ é uma norma matricial subordinada à norma vetorial $\|v\|_\infty$, ou seja, provamos a equação (16). Logo,

$$\|A\|_\infty = max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Note que as normas matriciais $1, \infty$ são compatíveis e subordinadas às respectivas normas vetoriais. Porém, a norma de Frobenius é compatível a norma 2 vetorial, mas não subordinada como podemos observar abaixo.

Proposição 4.4: Sejam A de ordem $m \times n$ e v um vetor $n \times 1$. A norma matricial $\|A\|_F$ é compatível com a norma vetorial $\|v\|_2$.

Prova: Dada a norma vetorial

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \right)^{1/2}$$

para determinar a norma matricial associada a ela temos

$$\|Av\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 |v_i|^2}$$

$$\leq \left[\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} \right) \right]$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}\right)\|v\|_2$$

$$= \|A\|_F\|v\|_2$$

Logo a igualdade da equação (17) não foi satisfeita, isto é, a norma $\|A\|_F$ é compatível com a norma vetorial $\|v\|_2$ mas não é uma norma subordinada.

Vamos ver agora alguns exemplos de aplicações das normas matriciais subordinadas.

Exemplo 4.1: Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e norma de $\|v\|_1 = 1$. Vamos provar que a norma $\|A\|_1$ é norma subordinada à norma vetorial $\|v\|_1$.

Solução:

$\|A\|_1 = \max(7, 1) = 7$

Como $\|v\|_1 = \sum_{j=1}^{n}\left|v_j\right|$, então

$y_1 = Av = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, então $\|y_1\|_1 = 7$

$y_2 = Av = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\|y_2\|_1 = 1$

$y_3 = Av = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$, então $\|y_3\|_1 = 7$

$y_4 = Av = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\|y_4\|_1 = 1$

Então concluímos que a norma 1 é uma norma subordinada, pois $\max\|Av\|_1 = 7$ e $\|A\|_1 = 7$, e a norma do vetor $\|v\|_1$ foi escolhido de forma conveniente. Portanto

$$\|A\|_1 = max_{v\neq 0}\frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} \tag{117}$$

Consequentemente, a norma matricial $\|A\|_1$ é compatível com a norma vetorial $\|v\|_1$.

Exemplo 4.2: Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e norma de $\|v\|_\infty = 1$. Vamos provar que a norma $\|A\|_\infty$ é norma subordinada à norma vetorial $\|v\|_\infty$.

Solução:

$\|A\|_\infty = \max(6, 3) = 6$

Como $\|v\|_\infty = max_i |v_i|$, então

$y_1 = Av = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\|y_1\|_\infty = 2$

$y_2 = Av = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, então $\|y_2\|_\infty = 4$

$y_3 = Av = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\|y_3\|_\infty = 2$

$y_4 = Av = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, então $\|y_4\|_\infty = 4$

Provamos na Proposição 4.3 que a norma matricial $\|A\|_\infty$ é subordinada a norma vetorial $\|v\|_\infty$. Porém, neste exemplo, o vetor não foi escolhido de forma conveniente para que o máximo fosse atingido, pois $\|A\|_\infty = 6$ e $\max\|Av\|_\infty = 4$.

Exemplo 4.3: Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e norma de $\|v\|_2 = 1$. Vamos provar que a norma $\|A\|_F$ é norma compatível à norma vetorial $\|v\|_2$.

Solução: $\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

Como $\|v\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2)^{1/2}$, então

$y_1 = Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\|y_1\|_F = 1$

$y_2 = Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, então $\|y_2\|_F \approx 2{,}82$

$y_3 = Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\|y_3\|_F = 1$

$y_4 = Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, então $\|y_4\|_F \approx 2{,}82$

Como vimos na Proposição 4.4, a norma matricial $\|A\|_F$ é compatível com a norma vetorial $\|v\|_2$, pois $\|A\|_F = 3$ e $\|Av\|_F \approx 2{,}82$. Ou seja,

$$\|Av\|_F \leq \|A\|_F \|v\|_2$$

5 CONDICIONAMENTO

Na resolução de sistemas lineares de equações é necessário analisar se a solução é muito sensível a pequenas mudanças nos coeficientes. A sensibilidade de uma matriz está ligada diretamente ao seu condicionamento, ou seja, se é bem ou mal condicionada. Podemos usar as normas matriciais para estimar o quão sensível é um sistema linear.

Quanto maior for o número de condição de uma matriz quadrada A não singular mais apropriado é para medir o quanto ela é bem ou mal condicionada, e está definido

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \tag{23}$$

que é o produto de duas normas matriciais (LEON, 2011). Então concluímos que o valor do condicionamento depende de qual norma será utilizada, norma 1, norma ∞ ou norma de Frobenius que são as normas vistas nesse trabalho. E para especificar a norma, usaremos usualmente o índice p, então

$$cond_p(A) = \|A\|_p\|A^{-1}\|_p \tag{24}$$

De acordo com Leon (2011) define-se condicionamento de matriz da seguinte forma:

Definição 5.1: Uma matriz A é dita mal condicionada se mudanças relativamente pequenas nos elementos de A causam erros relativamente grandes nas soluções de $Ax = b$. A é dita bem condicionada se mudanças relativamente pequenas nos elementos de A causam erros relativamente pequenos nas soluções de $Ax = b$.

Matrizes com número de condição alto (acima de 10^4 para alguns autores) se dizem mal condicionadas e com número de condição baixo se dizem bem condicionadas.

Se tivermos uma matriz A não singular $n \times n$ e um sistema $Ax = b$, em que x é a solução exata e x' a solução calculada, então o erro é dado por $e = x - x'$. Seja $\|\cdot\|$ uma norma pertencente a $\mathbb{R}^n$, teremos $\|e\|$ a medida de erro absoluto e $\|e\|/\|x\|$ o erro relativo. Como em geral não temos uma maneira para definir os valores de $\|e\|$ e de $\|e\|/\|x\|$, então para testar a precisão de x' devemos colocá-lo no sistema original e ver o quanto $b' = Ax'$ está perto de b, e esta diferença é chamado de resíduo e calculado por:

$$r = b - b' = b - Ax' \tag{25}$$

e que é facilmente calculado. Com isso teremos também o resíduo relativo que é

$$\frac{||r||}{||b||} = \frac{||b - Ax'||}{||b||} \tag{26}$$

Em geral se uma matriz A for mal condicionada, o resíduo relativo pode ser muito distinto do erro relativo. Já se A for bem condicionada, os valores do resíduo relativo e do erro relativo estarão próximos. Para demonstrar isso é de suma importância o uso das normas matriciais.

Se o resíduo é

$$r = b - Ax' = Ax - Ax' = Ae$$

então

$$e = A^{-1}r$$

e seguindo a desigualdade (19), temos que

$$||e|| \leq ||A^{-1}|| \; ||r||$$

e

$$||r|| = ||Ae|| \leq \; ||A|| \; ||e||$$

logo,

$$\frac{||r||}{||A||} \leq ||e|| \leq ||A^{-1}|| \; ||r|| \tag{27}$$

Agora se tivermos x como solução exata do sistema linear $Ax = b$, então pelo mesmo esquema anterior, teremos $x = A^{-1}b$, e portanto

$$\frac{||b||}{||A||} \leq ||x|| \leq ||A^{-1}|| \; ||b|| \tag{28}$$

Então segue-se de (27) e de (28) que

$$\frac{1}{||A|| \; ||A^{-1}||} \frac{||r||}{||b||} \leq \frac{||e||}{||x||} \leq ||A|| \; ||A^{-1}|| \; \frac{||r||}{||b||} \tag{29}$$

De (23) temos que

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A)\ \frac{\|r\|}{\|b\|} \tag{30}$$

e essa desigualdade relaciona o tamanho do erro relativo ao resíduo relativo. Com isso, conclui-se que quanto mais o condicionamento for próximo de 1, mais os valores do erro relativo e do resíduo relativo serão próximos. E se o valor do condicionamento for relativamente grande, o valor do erro relativo poderá ser muitas vezes maior que o do resíduo relativo.

Vamos agora ver alguns exemplos sobre erro relativo, resíduo relativo e condicionamento.

Exemplo 5.1: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ não singular ($\det A \neq 0$). Vamos calcular o condicionamento de acordo com as normas $1, \infty$ e de Frobenius.

Solução:

Como $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, então

$$\det A = 3$$

e

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para a norma 1 teremos $\|A\|_1 = 6$ e $\|A^{-1}\|_1 = {}^5/_3$. Então

$$cond_1(A) = \|A\|_1\ \|A^{-1}\|_1 = 6\ \cdot\ {}^5/_3 = 10$$

Com base no resultado do condicionamento e no que foi visto, podemos dizer que o valor do erro relativo na solução do sistema linear $Ax = b$ poderá ser até 10 vezes o valor do resíduo relativo.

Para a norma ∞ teremos $\|A\|_\infty = 5$ e $\|A^{-1}\|_\infty = 2$. Então

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty\ \|A^{-1}\|_\infty = 5\ \cdot\ 2 = 10$$

E por fim para a norma de Frobenius teremos

$$\|A\|_F = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9 + 1 + 9} = \sqrt{23} \approx 4{,}79$$

e $\|A^{-1}\|_F = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} \approx \sqrt{2{,}55} \approx 1{,}59$

então

$$cond_F(A) = \|A\|_F\ \|A^{-1}\|_F = 4{,}79 \cdot 1{,}59 \approx 7{,}62$$

Exemplo 5.2: Supondo que $x' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$ seja a solução calculada do seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ \ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Vamos determinar o resíduo r e o resíduo relativo $\|r\|/\|b\|$ de acordo com a norma ∞ comparando-o com o erro e, o erro relativo $\|e\|/\|x\|$ e com o condicionamento da matriz A.

Solução:

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty\ \|A^{-1}\|_\infty = 5 \cdot 4 = 20$$

$$r = b - Ax'$$

$$r = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{0{,}4}{5} = \frac{1}{12{,}5} = 0{,}08$$

Mas sabendo que a solução real do sistema é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. O erro e é calculado por

$$e = x - x' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

e erro relativo é feito

$$\frac{\|e\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{1} = 1$$

Concluímos que o erro relativo é 12,5 vezes o resíduo relativo. Como vimos que o condicionamento da matriz A é relativamente grande ($cond_\infty A = 20$), é de se esperar que o erro relativo ser muitas vezes maior que o resíduo relativo.

Exemplo 5.3: Usando o mesmo exemplo anterior vamos ver os resultados agora para a norma 1 e de Frobenius.

Solução:

Para a norma 1 teremos

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \, \|A^{-1}\|_1 = 4 \cdot 5 = 20$$

$$r = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|r\|_1}{\|b\|_1} = \frac{0{,}6}{7} = \frac{1}{11{,}67} \approx 0{,}086$$

Mas sabendo que a solução real do sistema é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. O erro e é calculado por

$$e = x - x' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

e erro relativo é feito

$$\frac{\|e\|_1}{\|x\|_1} = \frac{1.8}{2} = 0{,}9$$

Concluímos pela norma 1 que o erro relativo é aproximadamente 11 vezes o resíduo relativo, muito parecido comparando com a norma ∞.

Agora para a norma de Frobenius teremos

$$cond_F(A) = \|A\|_F \, \|A^{-1}\|_F \approx 3{,}88 \cdot 3{,}88 \approx 15$$

$$r = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|r\|_F}{\|b\|_F} \approx \frac{0{,}45}{5{,}39} = \frac{1}{11{,}97} \approx 0{,}083$$

Mas sabendo que a solução real do sistema é $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. O erro e é calculado por

$$e = x - x' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}$$

e erro relativo é feito

$$\frac{\|e\|_F}{\|x\|_F} \approx \frac{1{,}28}{1{,}41} \approx 0{,}9$$

Concluímos pela norma de Frobenius que o erro relativo é aproximadamente 10 vezes o resíduo relativo, muito parecido comparando com as normas 1 e ∞.

Assim, como vimos nos exemplos acima, o condicionamento de matrizes não singulares nos dão uma boa informação sobre as mesmas se são bem ou mal condicionadas.

6 SENSIBILIDADE DA SOLUÇÃO

Segundo Campos (2010), dado um sistema de equação linear $Ax = b$ com uma pequena perturbação δb em b. A mudança δx na solução $x = A^{-1}b$ satisfaz

$$\delta x = A^{-1}\delta b \tag{31}$$

Então tendo que $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$ e $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$. Combinando ambas ficamos com

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \tag{32}$$

Devido à perturbação ocorrida em δb esta equação nos fornece um limite superior ao erro relativo na solução x. Como $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, então quanto mais um sistema de equação linear $Ax = b$ for mal condicionado, maior será o número de condição e maior será o erro relativo.

Vamos ver agora algumas aplicações de acordo com exemplos vistos no capítulo anterior.

Exemplo 6.1: De acordo com o exemplo 5.2, considere a perturbação $\delta b = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $cond_\infty(A) = 20$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. A partir da equação (32) vamos provar pela norma ∞ que

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq cond_\infty(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

Solução: Como $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a solução de $Ax = b$, $\|b\|_\infty = 5$ e $\|\delta b\|_\infty = 0{,}6$, temos que o erro relativo da norma ∞ é

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 20 \cdot \frac{0{,}6}{5} = 2{,}4$$

De fato com a perturbação δb a solução x variou de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$, isto é, $\delta x = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1{,}2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$, e $\|\delta x\|_\infty = 0{,}2$. Assim o erro relativo cometido foi de

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{0{,}2}{1} = 0{,}2$$

que está dentro do limite previsto de 2,4.

Exemplo 6.2: De acordo com o exemplo 5.3, considere a perturbação $\delta b = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $cond_1(A) = 20$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. A partir da equação (32) vamos provar pela norma 1 que

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq cond_1(A) \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}$$

Solução: Como $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a solução de $Ax = b$, $\|b\|_1 = 7$ e $\|\delta b\|_1 = 0{,}8$, temos que o erro relativo da norma 1 é

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq 20 \cdot \frac{0{,}8}{5} = 3{,}2$$

De fato com a perturbação δb a solução x variou de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$, isto é, $\delta x = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1{,}2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$, e $\|\delta x\|_1 = 0{,}2$. Assim o erro relativo cometido foi de

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{0{,}2}{1} = 0{,}2$$

que está dentro do limite previsto de 3,2.

Exemplo 6.3: De acordo com o exemplo 5.3, considere a perturbação $\delta b = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $cond_F(A) = 15$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. A partir da equação (32) vamos provar pela norma de Frobenius que

$$\frac{\|\delta x\|_F}{\|x\|_F} \leq cond_F(A) \frac{\|\delta b\|_F}{\|b\|_F}$$

Solução: Como $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a solução de $Ax = b$, $\|b\|_F \approx 5{,}38$ e $\|\delta b\|_F = 0{,}63$, temos que o erro relativo da norma Frobenius é

$$\frac{\|\delta x\|_F}{\|x\|_F} \leq 15 \cdot \frac{0{,}63}{5{,}38} \approx 1{,}76$$

De fato com a perturbação δb a solução x variou de $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}1\\1,2\end{bmatrix}$, isto é, $\delta x = \begin{bmatrix}1-1\\1,2-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0,2\end{bmatrix}$, e $\|\delta x\|_F = 0,2$. Assim o erro relativo cometido foi de

$$\frac{\|\delta x\|_F}{\|x\|_F} = \frac{0,2}{1} = 0,2$$

que está dentro do limite previsto de 1,76.

Agora para considerar uma perturbação na matriz A de um sistema de equação linear temos

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

$$Ax + A\delta x + \delta Ax + \delta A\delta x = b$$

$$A\delta x = b - Ax - \delta Ax - \delta A\delta x$$

como $b - Ax = 0$ teremos

$$A\delta x = -\delta Ax - \delta A\delta x$$

$$A\delta x = -\delta A(x + \delta x)$$

$$\delta x = -A^{-1}(\delta A)(x + \delta x)$$

Tomando como base a desigualdade (19) teremos

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x + \delta x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\| = cond\ (A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \tag{33}$$

Exemplo 6.4: De acordo com o exemplo 5.2, considere a perturbação $\delta A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $cond_\infty(A) = 20$ e $b = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$. A partir de (33) vamos provar pela norma ∞ que

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x + \delta x\|_\infty} \leq cond_\infty(A)\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}$$

Solução: Como $x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ a solução de $Ax = b$, $\|\delta A\|_\infty = 2$ e $\|A\|_\infty = 5$, temos que o erro relativo da norma ∞ é

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x + \delta x\|_\infty} \leq 20 \cdot \frac{2}{5} = 8$$

Com a perturbação δA a solução x variou de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}$, isto é, $\delta x = \begin{bmatrix} 3/2 - 1 \\ 1/6 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/6 \end{bmatrix}$, assim o erro relativo cometido foi de

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x + \delta x\|_\infty} = \frac{1/2}{3/2} \approx 0{,}33$$

que está dentro do limite previsto de 8.

Exemplo 6.5: De acordo com o exemplo 5.2, considere a perturbação $\delta A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $cond_1(A) = 20$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. A partir de (33) vamos provar pela norma 1 que

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x + \delta x\|_1} \leq cond_1(A) \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1}$$

Solução: Como $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a solução de $Ax = b$, $\|\delta A\|_1 = 2$ e $\|A\|_1 = 4$, temos que o erro relativo da norma 1 é

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x + \delta x\|_1} \leq 20 \cdot \frac{2}{4} = 10$$

Com a perturbação δA a solução x variou de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}$, isto é, $\delta x = \begin{bmatrix} 3/2 - 1 \\ 1/6 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/6 \end{bmatrix}$, assim o erro relativo cometido foi de

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x + \delta x\|_1} = \frac{5/3}{4/3} \approx 1{,}25$$

que está dentro do limite previsto de 10.

Exemplo 6.6: De acordo com o exemplo 5.2, considere a perturbação $\delta A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $cond_F(A) = 15$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. A partir de (33) vamos provar pela norma Frobenius que

$$\frac{\|\delta x\|_F}{\|x + \delta x\|_F} \leq cond_F(A) \frac{\|\delta A\|_F}{\|A\|_F}$$

Solução: Como $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a solução de $Ax = b$, $\|\delta A\|_F \approx 2{,}24$ e $\|A\|_F \approx 3{,}87$, temos que o erro relativo da norma de Frobenius é

$$\frac{\|\delta x\|_F}{\|x + \delta x\|_F} \leq 15 \cdot \frac{2{,}24}{3{,}87} \approx 8{,}68$$

Com a perturbação δA a solução x variou de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/6 \end{bmatrix}$, isto é, $\delta x = \begin{bmatrix} 3/2 - 1 \\ 1/6 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -5/6 \end{bmatrix}$, assim o erro relativo cometido foi de

$$\frac{\|\delta x\|_F}{\|x + \delta x\|_F} = \frac{0{,}94}{2{,}27} \approx 0{,}41$$

que está dentro do limite previsto de 8,68.

De acordo com Strang (2009) o erro de arredondamento surge a partir de duas fontes como essas desigualdades nos mostram. Uma sensibilidade do problema é medido pelo condicionamento, e outra do erro real δb ou δA. Com isso podemos concluir, mais uma vez, que quanto mais um sistema linear for mal condicionado maior será a influência da perturbação δA em A na solução x.

7 CONCLUSÃO

As normas matriciais são de fundamental importância na aplicação de sistemas de equações lineares. Muitos problemas encontrados nas engenharias podem ser resolvidos através da utilização de matrizes. E o presente trabalho visou estabelecer o estudo de alguns tipos de normas matriciais e suas aplicações na resolução de sistemas equações lineares, aliando os conhecimentos do cálculo, da geometria analítica e da álgebra linear numérica.

No presente trabalho vimos que a cada norma matricial induzida poderá existir uma norma vetorial associada a ela. E observamos também a relação que existe entre o condicionamento de uma matriz e a sensibilidade da solução de sistema de equações lineares.

Nos preocupamos com a precisão das soluções de sistemas de equações lineares, já que essas soluções podem ter perturbações. As soluções e as precisões dependem da sensibilidade, e a sensibilidade pode ser medida de acordo com o condicionamento. Para analisar o condicionamento de uma matriz requer antes constituir resultados sobre alguns tipos de normas matriciais e normas matriciais subordinadas.

Sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho serve como base para posteriores pesquisas de outros tipos de normas matriciais encontrada na literatura acadêmica, bem como analisar suas respectivas consequências.

Futuramente também podemos estender o mesmo para o cálculo numérico, analisando os principais tipos de resolução de sistemas de equações lineares, sejam eles diretos ou iterativos, comparando com as normas matriciais vistas no trabalho e até outras posteriormente.

REFERÊNCIAS

ARENALES, Selma; DAREZZSO, Arthur. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Thompson: 2008.

BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I.R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear.** 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial.** São Paulo: Makron Books, 1987.

BURDEN, Richard L; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: Thomson Learning, 2003.

CAMPOS, Filho; FERREIRA, Frederico. **Algoritmos Numéricos.** 2. ed. Rio Janeiro: LTC, 2010.

FRANCO, Neide Bertold. **Cálculo Numérico.** São Paulo: Prentice Hall, 2006.

LEON, Steve J. **Álgebra Linear com Aplicações.** 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw Hill, 1977.

POOLE, David. **Álgebra Linear.** São Paulo: Cengage Learning, 2004.

RUGGIERO, Márcia A Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Calculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** 2 ed. São Paulo: Pearson, 2010.

STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. São Paulo: Cengage Learning, 2009.