F - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Este método, sob determinadas condições, apresenta vantagens sobre os método anteriores: é de convergência mais rápida e, para encontrar as raízes, não é obrigatória a condição $f(a) \times f(b) < 0$.

Seja a equação $f(x) = 0$, da qual se conhece a raiz aproximada x_0 e seja δ_0 o erro dessa raiz:

$$f(x_0 + \delta_0) = 0$$

se

$$f(x_0 + \delta_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \delta_0 + R_2 = 0$$

onde R_2 é um infinitésimo de 2ª ordem em δ_0 que pode ser escrito como:

$$R_2 = \frac{\delta_0^2}{2!} \cdot f'(x_0) + \ldots$$

e por conseguinte será pequeno se δ_0 e se $f''(x_0)$ não for muito elevado. Teoricamente o valor $\delta_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ tem tendência a ser cada vez mais pequeno, o que justifica o poder ser desprezado. Desprezando R_2 temos que:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot \delta_0 = 0$$

ou seja,

$$\delta_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Assim, um novo valor $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ mais aproximado da raiz da equação pode ser obtido.

Prosseguindo a iteração, obtém-se uma sequência de valores sucessivamente mais aproximados da raiz.

A fórmula de recorrência é dada por:

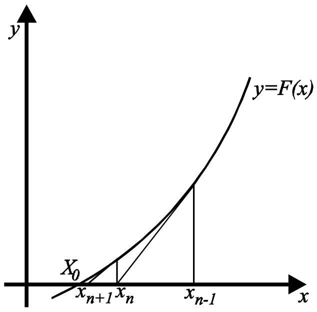
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

As condições de convergência são agora (por análise intuitiva):

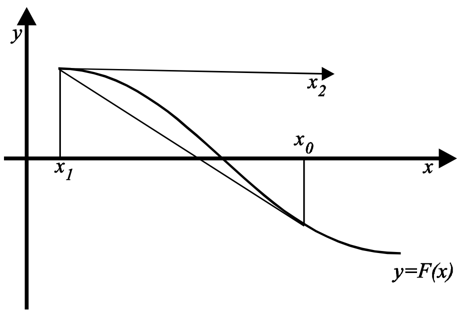
1. x_0 é suficientemente próximo de uma raiz da equação.
2. $f''(x)$ não toma valores excessivamente grandes
3. $f'(x)$ não é muito próxima de zero

<u>Interpretação gráfica do Método</u>

O gráfico seguinte traduz a aplicação do método de Newton-Raphson a uma função.



O gráfico seguinte mostra um caso em que o método não converge. Note-se que entre x_0 e x_1 existe um ponto de inflexão da função $f(x)$ e que em x_1 a derivada $f'(x)$ é próxima de zero.



As condições suficientes de convergência podem ser estabelecidas com mais rigor:

- Seja $[a,b]$ um intervalo que contém uma só raiz da equação $f(x)=0$. A sucessão de valores x_i gerados pelo método de Newton-Raphson é monótona e limitada pela raiz x_0 (e portanto convergente) se:
  1. $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$
  2. $f''(x)$ é de sinal constante em $]a,b[$, ou seja, $f''(a) \cdot f''(b) > 0$
  3. O valor inicial x_0 for o extremo do intervalo $[a,b]$ em que $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$, isto é toma-se $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ de modo que $f(x_0)$ e tenham o mesmo sinal

Ex. - Determinar as raízes reais da equação $f(x) = x^3 - x - 4 = 0$ com erro inferior a 10^{-4}.

a) A separação das raízes pelo método gráfico mostra a existência de uma única raiz real no intervalo $]1,2[$. Podemos verificar que é verdade que existe uma raiz neste intervalo, já que $f(1) = -4 < 0$ e $f(2) = 2 > 0$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 1$ é diferente de zero naquele intervalo, já que se anula para $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $f''(x) = 6x > 0$ em todo o intervalo

d) Então, tomar $x_0 = 2$ pois que $f(2) \cdot f''(2) > 0$. Com este quarto ponto também verificado estão cumpridas as condições de convergência, pelo que podemos começar as iterações.

e) Podemos fazer as iterações utilizando o seguinte quadro:

n	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	2.000000000	2.000000000	11.000000000	0.181818181
1	1.818181818	0.192336589	8.917355372	0.021568792
2	1.796613026	0.002527490	8.683455090	0.000291069
3	1.796321956	0.000000456	8.680317707	0.000000052
4	1.796321903	---	---	---

Podemos ver por este exemplo que este método é mais rápido que os estudados até aqui, embora apresente algumas desvantagens tais como a necessidade de verificação de algumas condições de convergência e obrigar ao cálculo da primeira e segunda derivada da função.

Ex. - Tendo em atenção a função $f(x) = -\frac{3}{4}x^5 + \frac{21}{4}x^4 - \frac{49}{4}x^3 + \frac{39}{4}x^2 + x - 2 = 0$ e sabendo que admite pelo menos uma raiz real no intervalo $]0,1[$. Calcule utilizando o método de Newton-Raphson essa raiz.

Verificando as condições de convergência:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$

   $f(0) = -2$

   $f(1) = 1$

   logo $f(0) \cdot f(1) = -2 < 0$, satisfazendo assim esta condição

2. $f'(x) \neq 0, \forall x \in]0,1[$

   $f'(x) = -\frac{15}{4}x^4 + 21x^3 - \frac{147}{4}x^2 + \frac{39}{2}x + 1$ que é sempre positiva neste intervalo, logo a condição está satisfeita

3. $f''(x) \rightarrow$ sinal constante em todo o intervalo

   $f''(x) = -15x^3 + 63x^2 - \frac{147}{2}x + \frac{39}{2}$

$$f''(0) = \frac{39}{2}$$

$$f''(1) = -6$$

Estes resultados implicam que $f''(x)$ não tem sinal constante, logo as condições de convergência não se verificam no seu conjunto e consequentemente o método de Newton-Raphson não pode ser utilizado para estes valores.

Mesmo sabendo que não se pode aplicar o método de Newton-Raphson para estes valores vamos iterar e verificar que a fórmula de recorrência não converge para o resultado. Podemos então apresentar os resultados das iterações utilizando um quadro semelhante ao do exemplo anterior.

n	$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	0	-2	1	-2
1	2	1	1	1
2	1	1	1	1
3	0	-2	1	-2
4	2			