

---

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS AMBIENTAIS  
FENÔMENOS DE TRANSPORTE  
MECÂNICA DOS FLUIDOS

EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE  
EQUAÇÃO DE BERNOULLI

REGIME DE ESCOAMENTO

Prof. Roberto Vieira Pordeus

## TIPOS E REGIME DE ESCOAMENTO

**Características dos fluidos.** A matéria apresenta-se no estado sólido ou no estado fluido, este abrangendo os estados líquido e gasoso. O espaçamento e a atividade intermoleculares são maiores nos gases, menores nos líquidos e muito reduzido nos sólidos.

**Definição de um fluido.** Fluidos são substâncias que são capazes de escoar e cujo volume toma a **forma de seu recipiente**. Quando em equilíbrio, os fluidos não suportam forças tangenciais ou cisalhantes. Todos os fluidos possuem um certo grau de compressibilidade e oferecem pequena resistência à mudança de forma.

Os **fluidos** podem ser divididos em **líquidos** e **gases**. A principal diferença entre eles são: ( a ) os **líquidos** são praticamente incompressíveis, ao passo que os **gases** são compressíveis e muitas vezes devem ser assim tratados e ( b ) os líquidos ocupam **volumes definidos** e tem superfícies livres ao passo que uma dada massa de **gás** expande-se até ocupar **todas** as parte do recipiente.

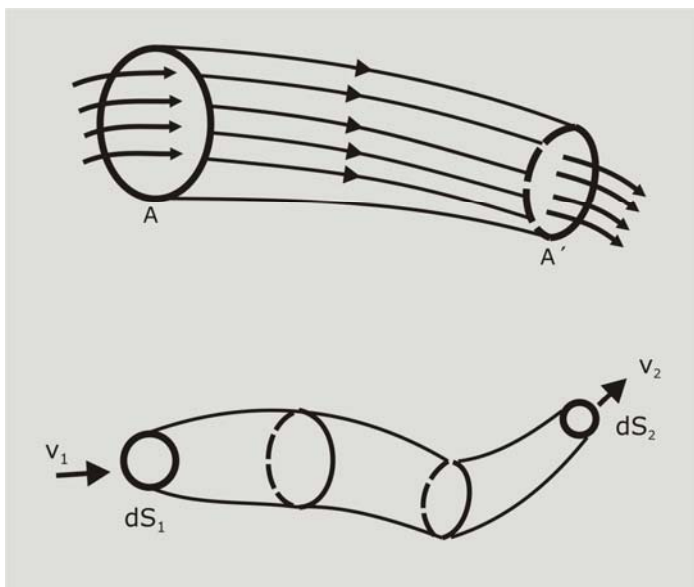
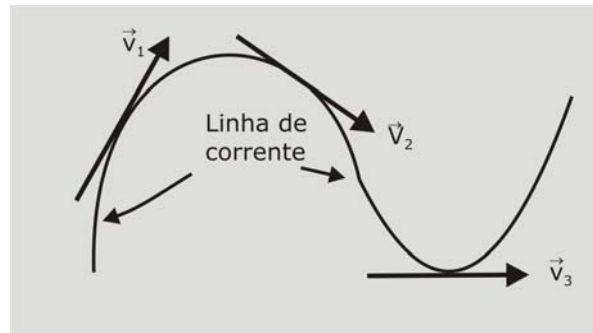
A mecânica dos fluidos lida com o comportamento dos fluidos em repouso ou em movimento. O escoamento dos fluídos é complexo e nem sempre sujeito à análise matemática exata.

**Escoamento de fluídos.** O escoamento de fluidos pode ser permanente (estável) ou não-permanente (instável); uniforme ou não-uniforme (variado); laminar ou turbulento; uni, di ou tridimensional; rotacional ou irrotacional.

O **escoamento unidimensional** de um fluido incompressível ocorre quando a direção e a intensidade da velocidade é a mesma para todos os pontos.

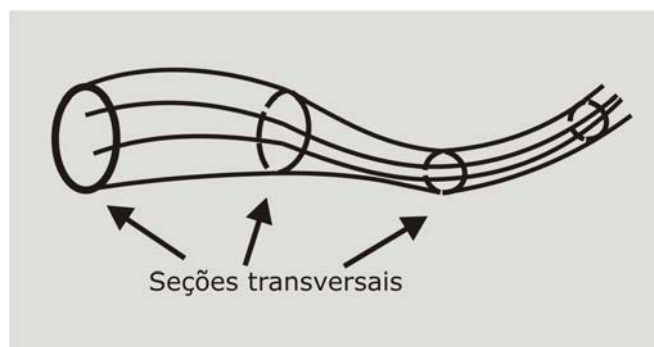
O **escoamento bidimensional** ocorre quando as partículas do fluído se movem em planos ou em planos paralelos e, suas trajetórias são idênticas em cada plano. As grandezas do escoamento variam em 2 dimensões.

**Linhas de corrente.** Linhas de corrente são curvas imaginárias tomadas através do fluido para indicar a direção da velocidade em diversas seções do escoamento no sistema fluido. Uma tangente a curva em qualquer ponto representa a direção instantânea da velocidade das partículas fluidas naquele ponto.



**Tubo de corrente.** Um tubo de corrente é um tubo imaginário envolvido por um conjunto de linhas de corrente, que delimitam o escoamento. O tubo de corrente é também conhecido como "veia líquida". As linhas imaginárias fechadas que limitam o tubo é chamado diretriz do tubo.

**Seção transversal.** É cada superfície limitada pelo tubo (ou pelo filamento) de corrente e traçada segundo a normal às linhas de corrente no ponto considerado.



Três conceitos são importantes nos fundamentos de escoamento dos fluídos:

1. o princípio da conservação da **massa**, a partir do qual a equação da continuidade é desenvolvida;
2. o princípio da energia **cinética**, a partir do qual algumas equações são deduzidas;
3. o princípio da quantidade de **movimento**, a partir do qual as equações que determinam as forças dinâmicas exercidas pelos fluídos em escoamento, podem ser estabelecidas.

**Equação da continuidade.** Para o escoamento permanente a massa de fluido que passa por todas as seções de uma corrente de fluido por unidade de tempo é a mesma.

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \text{constante},$$

ou

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad (\text{em kg / s})$$

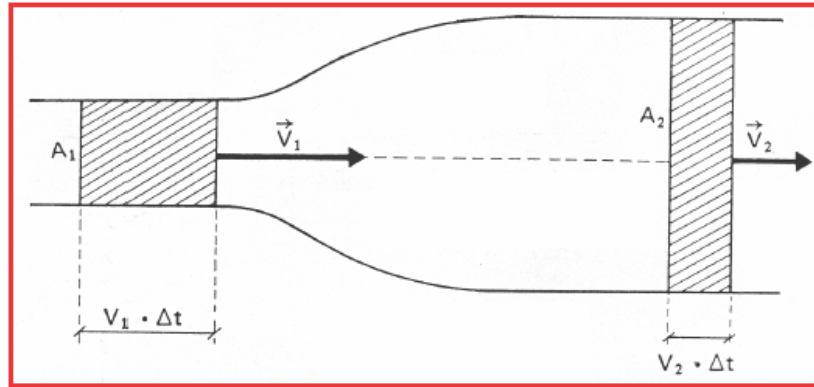
Para fluidos incompressíveis onde  $\rho_1 = \rho_2$ ,

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constante} \quad (\text{em m}^3 \text{ s}^{-1}),$$

onde  $A_1$  e  $V_1$  são respectivamente a seção reta em  $\text{m}^2$  e a velocidade média da corrente em  $\text{m s}^{-1}$  na Seção 1, com os termos semelhantes para a Seção 2.

## EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Na figura, esquematizamos um tubo. Sejam  $A_1$  e  $A_2$  as áreas das seções retas em duas partes distintas do tubo. As velocidades de escoamento em  $A_1$  e  $A_2$  valem, respectivamente,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ ,



Como o líquido é incompressível, o volume que entra no tubo no tempo  $t$  é aquele existente no cilindro de base  $A_1$  e altura  $x_1 = v_1 \cdot t$ . Esse volume é igual àquele que, no mesmo tempo, sai da parte cuja seção tem área  $A_2$ .

### EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Volume (1) = Volume (2)

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

Se dividirmos o volume escoado  $V$  pelo tempo de escoamento  $t$ , teremos uma grandeza denominada vazão em volume, e é representado pela letra  $Q$ .

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad Q = \frac{(m^3)}{(s)}$$

Podemos afirmar então que:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{A_1 \cdot \Delta x_1}{\Delta t} = \frac{A_2 \cdot \Delta x_2}{\Delta t}$$

e finalmente chegamos a Equação da continuidade:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$Q_1 = Q_2 = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \quad \text{Equação da Continuidade}$$

Pela equação da continuidade podemos afirmar que “a **velocidade de escoamento é inversamente proporcional à área da seção transversal**”

**Equação de energia.** A equação de energia resulta da aplicação do princípio de conservação de energia ao escoamento. A energia que um fluido em escoamento possui é composta da energia interna e das energias devidas à pressão, à velocidade e à posição.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{na Seção 1} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{Adicionada} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{Perdida} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{Retirada} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{na Posição 2} \end{array} \right)$$

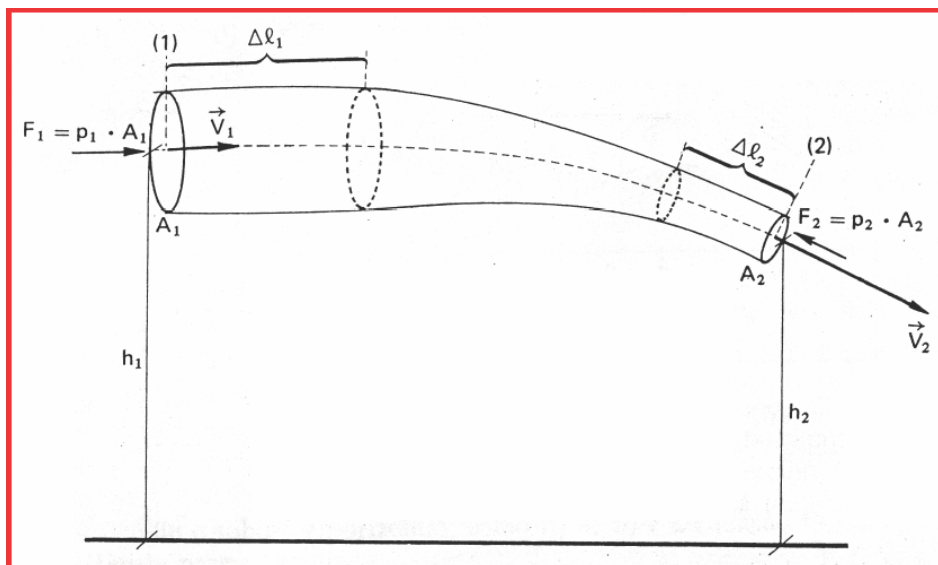
Esta equação para escoamento permanente de fluidos incompressíveis, nos quais a variação de energia interna é desprezível simplifica-se:

$$\left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 \right) + H_A - H_L - H_E = \left( \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 \right)$$

Esta equação é conhecida como o *teorema de Bernoulli*.

## EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Daniel Bernoulli, mediante considerações de energia aplicada ao escoamento de fluidos, conseguiu estabelecer a equação fundamental da Hidrodinâmica. Tal equação é uma relação entre a pressão, a velocidade e a altura em pontos de uma linha de corrente.



Considerando duas seções retas de áreas  $A_1$  e  $A_2$  num tubo de corrente, sejam  $p_1$  e  $p_2$  as pressões nessas seções. A massa específica é " $\rho$ " e as velocidades de escoamento

valem, respectivamente,  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Sejam  $\overrightarrow{F}_1$  e  $\overrightarrow{F}_2$  as forças de pressão exercidas pelo fluido restante sobre o fluido contido no tubo.

$$W_{\overrightarrow{F}_1} + W_{\overrightarrow{F}_2} = \Delta E_C + \Delta E_P$$

A soma algébrica dos trabalhos realizados pelas forças  $\overrightarrow{F}_1$  e  $\overrightarrow{F}_2$  é igual a soma das variações das energias cinética e potencial entre as secções (1) e (2).

$$W_{\overrightarrow{F}_1} + W_{\overrightarrow{F}_2} = \Delta E_C + \Delta E_P$$

$$(F_1 \cdot \Delta \ell_1) - (F_2 \cdot \Delta \ell_2) = \left( \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} \right) + (m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1)$$

Como

$$F = p \cdot A \quad \text{e} \quad \rho = \frac{m}{V}$$

obtemos

$$(p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta \ell_1) - (p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta \ell_2) = \left( \frac{\rho \cdot V \cdot v_2^2}{2} - \frac{\rho \cdot V \cdot v_1^2}{2} \right) + (\rho \cdot V \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot V \cdot g \cdot h_1)$$

Também sabemos que

$$A_1 \times \Delta \ell_1 = V$$

$$A_2 \times \Delta \ell_2 = V$$

Chegamos a

$$(p_1 \cdot V) - (p_2 \cdot V) = \left( \frac{\rho \cdot V \cdot v_2^2}{2} - \frac{\rho \cdot V \cdot v_1^2}{2} \right) + (\rho \cdot V \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot V \cdot g \cdot h_1)$$

e dividindo cada termo por V

$$(p_1 \cancel{V}) - (p_2 \cancel{V}) = \left( \frac{d \cancel{V} \cdot v_2^2}{2} - \frac{d \cancel{V} \cdot v_1^2}{2} \right) + (d \cancel{V} \cdot g \cdot h_2 - d \cancel{V} \cdot g \cdot h_1)$$

obtemos

$$p_1 - p_2 = \left( \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} - \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \right) + (\rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot g \cdot h_1)$$

E finalmente chegamos a Equação de Bernoulli

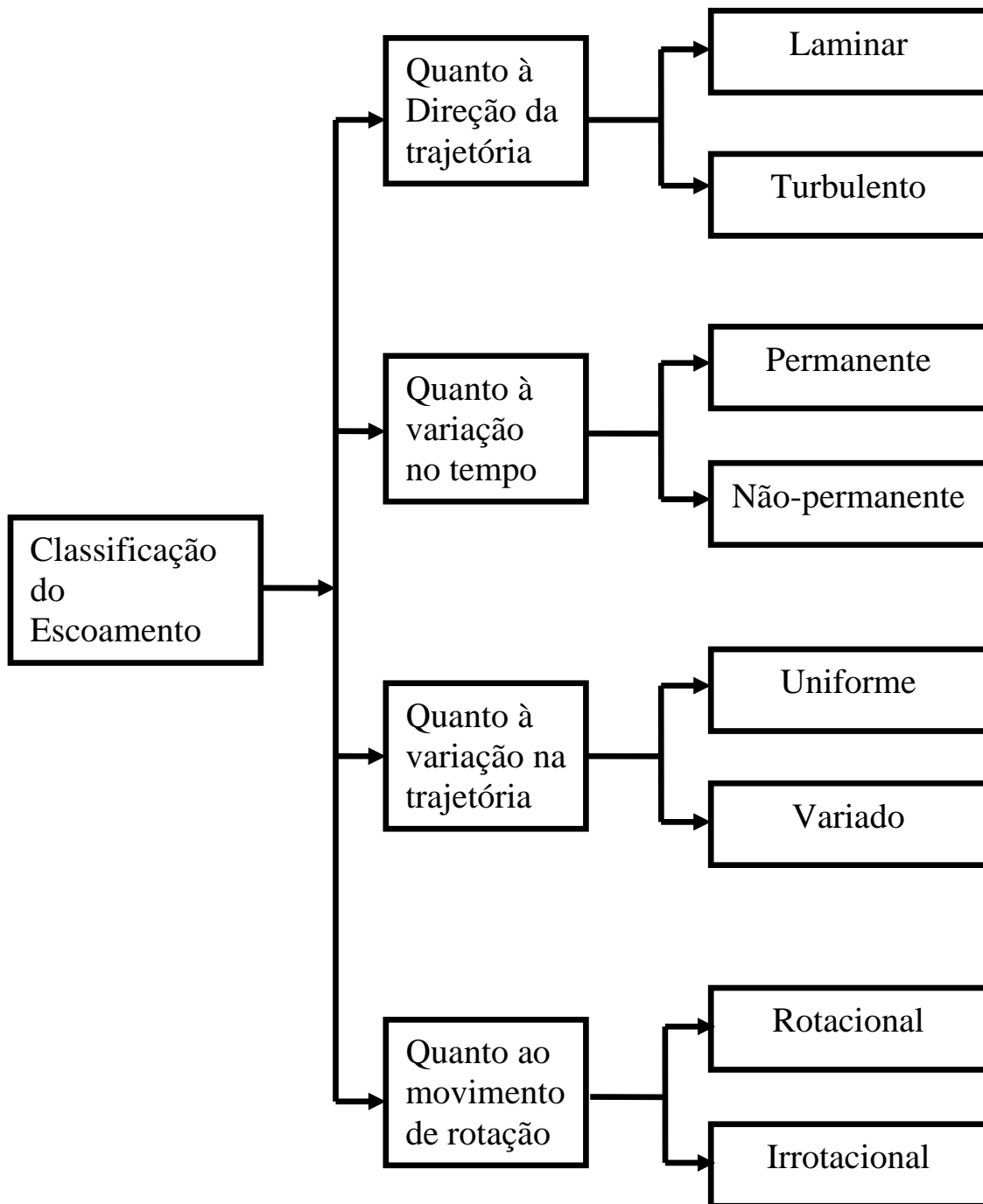
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

Se o tubo for horizontal, então  $h_1 = h_2$  e a equação fica simplificada para:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

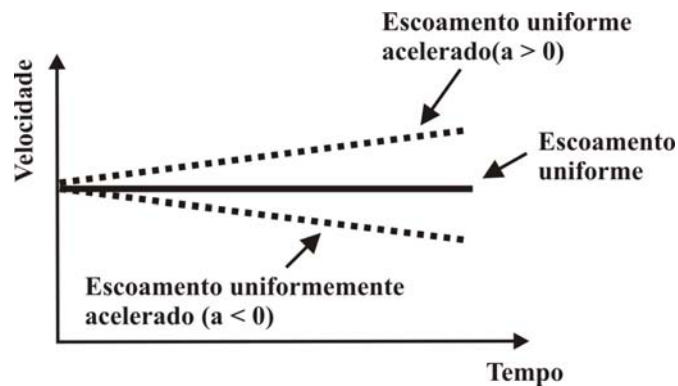


## TIPOS E REGIME DE ESCOAMENTO

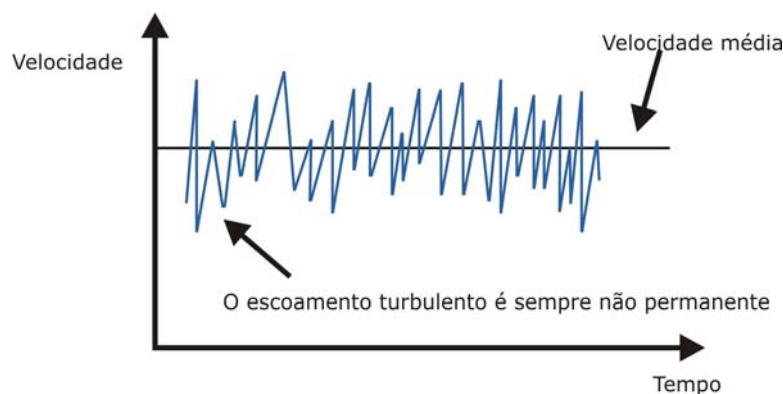


**ESCOAMENTO LAMINAR E TURBULENTO** - Quanto à Direção da trajetória Dependente do estado de organização do escoamento

1. **ESCOAMENTO LAMINAR.** Neste tipo as partículas do fluido percorrem trajetórias paralelas. O escoamento laminar é também conhecido como lamelar ou tranqüilo.



2. **ESCOAMENTO TURBULENTO.** As trajetórias são curvilíneas e irregulares. Elas se entrecruzam, formando uma série de minúsculos remoinhos. O escoamento turbulento é também conhecido como “turbilhonário” ou “hidráulico”. Na prática, o escoamento dos fluidos quase sempre é turbulento. É o regime encontrado nas obras e instalações de engenharia, tais como adutoras, vertedores de barragens, fontes ornamentais etc.



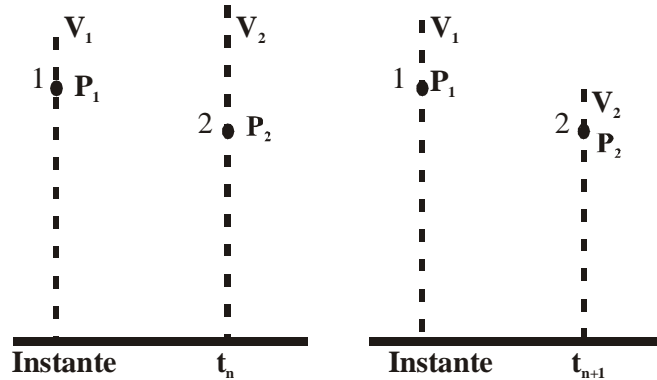
**Quanto à variação no tempo**

3. **ESCOAMENTO PERMANENTE.** Neste tipo, a velocidade e a pressão em determinado ponto, não variam com o tempo. A velocidade e a pressão podem variar do ponto 1 para o ponto 2, mas são constantes em cada ponto imóvel do espaço, a qualquer

tempo. O escoamento permanente é também chamado de “*estacionário*” e diz que a corrente fluida é “*estável*”. Nele a pressão e a velocidade em um ponto A (x,y,z) são funções das coordenadas desse ponto (não dependem do tempo).

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$



4. **ESCOAMENTO NÃO-PERMANENTE.** Neste caso, a velocidade e a pressão, em determinado ponto, variam com o tempo. Variam também de um ponto a outro. Este tipo é também chamado de “*variável*” (ou *transitório*), e diz-se que corrente é “*instável*”. A pressão e a velocidade em um ponto A (x,y,z) dependem tanto das coordenadas como também do tempo *t*.

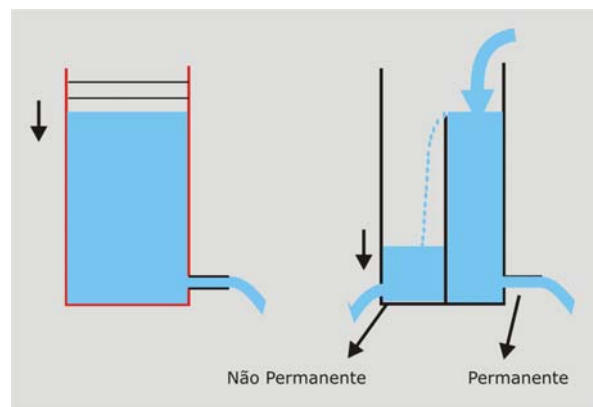
$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$$

Ex. O escoamento não-permanente ocorre quando se esvazia um recipiente através de um orifício; a medida que a superfície livre vai baixando, a pressão e a velocidade diminuem.

Escoamento Permanente e Não-Permanente

Dependência com o tempo

- Permanente  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Não Permanente  $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$



### **Quanto à variação na trajetória**

5. **ESCOAMENTO UNIFORME.** Neste tipo, todos os pontos da mesma trajetória têm a mesma velocidade. É um caso particular do escoamento permanente: a velocidade pode variar de uma trajetória para outra, mas, na mesma trajetória, todos os pontos têm a mesma velocidade, ou seja, de um ponto a outro da mesma trajetória, a velocidade não varia (o módulo, a direção e o sentido são constantes). Ex. Este tipo ocorre em tubulações longas, de diâmetro constante. No escoamento uniforme, a seção transversal da corrente é invariável.
6. **ESCOAMENTO VARIADO.** Neste caso, os diversos pontos da mesma trajetória não apresentam velocidade constante no intervalo de tempo considerado. O escoamento variado ocorre, por exemplo: nas correntes convergentes, originárias de orifícios e também nas correntes de seção.

### **Quanto ao movimento de rotação**

7. **ESCOAMENTO ROTACIONAL.** Cada partícula está sujeita à velocidade angular  $w$ , em relação ao seu centro de massa. Por exemplo, o escoamento rotacional é bem caracterizado no fenômeno do equilíbrio relativo em um recipiente cilíndrico aberto, que contém um líquido e que gira em torno de seu eixo vertical. Em virtude da viscosidade, o escoamento dos fluidos reais é sempre do tipo rotacional.
8. **ESCOAMENTO IRROTACIONAL.** Para simplificar o estudo da Mecânica dos Fluidos, é usual desprezar a característica rotacional do escoamento, passando-se a considerá-lo como irrotacional, através dos princípios clássicos da Fluidodinâmica. No tipo irrotacional, as partículas não se deformam, pois se faz uma concepção matemática do escoamento, desprezando a influência da viscosidade.